



CAPES/AGREG Maths

Préparation intensive à l'entretien

Dany-Jack Mercier



Table des matières

↬ Plusieurs versions de ce recueil paraîtront sur le site MégaMaths au fur et à mesure de son avancement. La date de la version apparaît sur la première page de titre.

↬ Retrouvez MégaMaths Facebook pour rejoindre notre communauté :

http ://www.facebook.com/avantimegamaths



Introduction

Voici un recueil de questions auxquelles il faut savoir répondre seul, debout, au tableau, en face du jury, pendant un entretien qui suit un exposé donné dans le cadre d'une épreuve d'admission à un concours comme le CAPES ou l'agrégation.

On se méfiera de la relative simplicité de certaines questions qui peuvent désarçonner quand elles sont posées à l'oral. Il existe en effet une énorme différence entre répondre à une question à l'oral en situation de stress, et y répondre calmement chez soi ou devant sa feuille pendant une épreuve écrite.

Etudier ces questions à tête reposée et s'entendre y répondre constitue un excellent entraînement pour asseoir ses connaissances fondamentales, celles que l'on est susceptible de mobiliser à tout moment et peuvent disqualifier un candidat que l'on interroge.

Les questions, regroupées par thèmes, pourront servir de fil d'Ariane aux candidats en leur indiquant des éléments de connaissance considérés comme faisant partie des acquis et de la culture mathématique commune du licencié de mathématiques.

MARATHON POUR LES ORAUX DE CONCOURS

L'idée de rassembler dans un fascicule des questions posées à l'oral m'est venue en mars 2011 quand j'ai décidé d'utiliser cinq heures de tutorat pour organiser un « Marathon pour oraux de concours ». Au début, il s'agissait de créer un document regroupant des questions posées durant ce Marathon pour permettre aux étudiants de s'entraîner seuls. Puis je me suis aperçu qu'en procédant ainsi on mettait l'accent sur tout un ensemble de questionsauxquelles il vaut mieux savoir répondre si on veut conserver ses chances de réussite au concours.

L'entraînement se déroule simplement : à tour de rôle, un candidat passe au tableau pour répondre du mieux possible à quelques questions. Ces questions seront souvent des questions importantes qui risquent de shunter la note si on montre au jury que l'on possède des lacunes à cet endroit.

[0]preparationintensive

Si le candidat ne gère pas la question, d'autres participants peuvent prendre la parole pour proposer leurs réponses voire le remplacer au tableau. Si personne ne répond, je peux proposer une réponse ou une brève analyse d'ensemble.

QUEL AVANTAGE DE PROCEDER AINSI ?

L'avantage d'un tel entraînement est multiple puisqu'il permet, en autre, de :

1) Mettre en évidence des questions « simples » auxquelles on peut ne pas penser.

2) Réviser des points fondamentaux (par exemple : savoir montrer que les médiatrices d'un triangle concourent).

3) Découvrir des questions considérées comme simples, mais bien dangereuses, auxquelles il est conseillé de savoir répondre même si l'on se trouve en situation de stress, seul au tableau et devant un jury. De telles questions peuvent être qualifiées de « mortelles ».

4) Apprendre à réagir pour le mieux quelle que soit la question.

5) Vérifier que l'on peut répondre sommairement à certaines questions et que cela peut suffire à satisfaire le jury.

6) S'entraîner à débuter une démonstration au tableau sans connaître la suite, le jury étant à l'affût des réactions du candidat pour savoir comment il raisonne sur une situation-problème.

7) Tester les réponses que l'on donne et découvrir les réactions du jury.

8) Expérimenter des séquences de questions enchaînées dès que le jury demande des précisions au sujet d'une réponse juste mais succincte. Ces questions permettent de s'assurer que le candidat ne bluffe pas et éventuellement permettent de mesurer l'étendue des lacunes de celui-ci quand on a découvert une faiblesse dans un domaine particulier.

9) S'entendre réagir au tableau sur des questions classiques.

BONNE HUMEUR DE RIGUEUR

La bonne humeur est de rigueur pendant les marathons ! Ce n'est pas noté, on ne conserve pas de trace, on a le droit de se planter. Bref, on se moque de savoir répondre ou non. L'objectif principal est de « pratiquer » ces questions ensemble avec suffisamment d'opiniâtreté et de ténacité pour finir par les maîtriser, même en situation difficile, debout, seul au tableau. L'accent est mis

sur le côté ludique de l'entraînement : on s'amuse et il en restera bien quelque chose !

Il s'agit d'aiguiser nos armes entre nous, en nous amusant sur toutes ces questions qui pleuvent de toute part.

OU SONT LES REPONSES ?

On ne trouvera pas de réponses dans ce fascicule. Les réponses figurent dans les livres de cours de licence ou de master, ou dans les livres cités en référence. Dans ces références, un Q renvoie vers un numéro de « Question », un T vers un numéro de « Théorème », et un C vers un numéro de « Chapitre ». Par exemple, la mention {[4] Q46} renvoie à la Question 46 du livre *Acquisition des fondamentaux pour les concours, vol. IV.*

Certaines questions extraites de mes ouvrages ont été simplifiées et/ou modifiées pour les adapter à l'utilisation que l'on peut en faire pendant un entretien. Cela fait l'originalité et l'intérêt de ce recueil.

QUELLES QUESTIONS ?

On trouvera toutes sortes de questions auxquelles il vaut mieux savoir répondre à l'oral. Comme par exemple : Qu'est-ce qu'une droite ? Qu'est-ce qu'un angle ? Pouvez-vous définir une application orthogonale de 5 manières différentes ? A quoi pensez-vous quand vous entendez : ellipses et affinités ? Le Théorème de Thalès est-il un résultat affine ou euclidien ? Comment définissez-vous une mesure algébrique ?

Il est temps de commencer à nous amuser !

Dany-Jack Mercier, le 16 janvier 2013

« La première figure de rhétorique est la répétition »

(Napoléon)

Chapitre 1

Généralités

1.1 Ensembles

1.2 Relations, fonctions, applications

Question 1 *[1] Définissez ce qu'est une fonction, une application.*

Question 2 *[1] Quand dit-on qu'une application est injective ? surjective ? bijective ?*

Question 3 *[1] Donnez deux définitions d'une bijection et montrez que ces définitions sont équivalentes.*

Question 4 *[1] Soient $g : E \to F$ et $f : F \to G$ deux applications.*
Montrer que : ($f \circ g$ surjective $\Rightarrow f$ surjective).

Question 5 *[1] Soient $g : E \to F$ et $f : F \to G$ deux applications.*
Montrer que : ($f \circ g$ injective $\Rightarrow g$ injective).

Question 6 *[1] Soit $f : E \to F$ une application de E vers F. Qu'appelle-t-on image directe d'une partie A de E par f ? Qu'appelle-t-on image réciproque d'une partie B de F par f ?*

Question 7 *[1]* ***(Images réciproques)*** *Soit f une application de E vers F.*

a) Si $A \subset B \subset F$, montrer que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

b) Si $A \subset F$, montrer que $f^{-1}\left(\complement A\right) = \complement\ f^{-1}(A)$.

c) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est une famille de sous-ensembles de F montrer que :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

Question 8 *[1]* ***(Images directes)*** *Soit f une application de E vers F.*

a) Si $A \subset B \subset E$, montrer que $f(A) \subset f(B)$.

b) Si A est une partie de E, montrer que les inclusions $f\left(\complement A\right) \subset \complement f(A)$ et $\complement f(A) \subset f\left(\complement A\right)$ sont fausses en général.

c) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de E, comparer $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ et $\bigcup_{i\in I} f(A_i)$, puis $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ et $\bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

Question 9 *[1] On considère une application $f : E \to F$. Soit $A \subset E$. Que peut-on dire de $f^{-1}(f(A))$ et de A ? Montrer que f est injective si et seulement si $f^{-1}(f(A)) = A$ pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$.*

Question 10 *[1] On considère une application $f : E \to F$. Soit $B \subset F$. Que peut-on dire de $f\left(f^{-1}(B)\right)$ et de B ? Montrer que f est surjective si et seulement si $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$ pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$.*

Question 11 *[1] Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et g une fonction numérique définie sur $f(I)$. Les fonctions f et g ne sont pas nécessairement dérivables. Si f est décroissante sur I et si g est décroissante sur $f(I)$, peut-on en déduire que $g \circ f$ est croissante sur I ? Justifier.*

Question 12 *[1] Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et soit f une application strictement monotone de D dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f : D \to f(D)$ est une bijection et que f^{-1} est strictement monotone de même sens que f.*

Question 13 *[1] Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est périodique et monotone sur $\mathbb{R}$, alors f est-elle constante ? Justifier.*

Question 14 *[1] Montrer que la fonction dérivée d'une fonction paire et dérivable est impaire.*

Question 15 *[1] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ \dot{x} & \mapsto & x^2 + 3x + 1 \end{array}$$

est-elle bien définie ?

Question 16 *[1] Montrer que l'application h ci-dessous est une bijection :*

$$h : \mathbb{R} \to \left]-1, 1\right[\quad ; \quad x \mapsto \frac{x}{1+|x|}.$$

Question 17 *[9] On considère les deux assertions suivantes :*

$$\begin{array}{lll}(A_1) & : & \forall x \in E \quad \exists y \in F \quad x = f(y) \\ (A_2) & : & \exists y \in F \quad \forall x \in E \quad x = f(y).\end{array}$$

Ces deux assertions sont-elles identiques ? Que dire d'une fonction f qui vérifierait l'assertion (A_1) ? L'assertion (A_2) ? Que peut-on en déduire sur la place des quantificateurs dans un énoncé logique ?

1.3 Relation d'équivalence

Question 18 *[1] Connaissez-vous des notions mathématiques importantes qui nécessitent de bien connaître les relations d'équivalences ?*

Question 19 *[1] Montrer que la donnée d'une relation d'équivalence sur un ensemble équivaut à la donnée d'une partition de cet ensemble.*

Question 20 *[1] Lorsque je dis et j'écris : "Je considère un triangle isocèle ABC tel que les côtés AB et AC sont égaux", je fais deux erreurs. Lesquelles ? Pouvez-vous définir ce qu'on entend par "longueur d'un segment" ? Par "mesure de la longueur d'un segment" ?*

1.4 Relation d'ordre

Question 21 *[1] Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Qu'appelle-t-on élément maximal de E ? Elément minimal ? Ces éléments existent-t-ils toujours ? Quels sont les éléments minimaux de $(\mathbb{N}\backslash\{1\}, |)$?*

Question 22 *[1] Soit A une partie d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$. Que veut-on dire quand on affirme que « m est un majorant de A » ? Que « m est le plus grand élément de A » ? Démontrez que le plus grand élément de A est unique s'il existe. Comment l'appelle-t-on encore ? Comment le note-t-on ?*

Question 23 *[1] Toute partie d'un ensemble ordonné admet-elle toujours un majorant ? Un plus grand élément ? Justifier votre réponse.*

Question 24 *[1] Soit A une partie d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$. Soit $a \in E$. Montrer que a est le plus grand élément de A si et seulement si c'est un élément maximal qui appartient à A.*

Question 25 *[1] Qu'est-ce qu'une partie bornée dans un ensemble ordonné ?*

Question 26 *[1] Il existe un plus petit élément et un plus grand élément dans* $\mathbb{N}$*, pour la relation de divisibilité. Qui sont-ils ?*

Question 27 *[1] Qu'appelle-t-on borne supérieur d'une partie* A *d'un ensemble ordonné* $(E, \leq)$ *? Comment la note-t-on ? Toutes les parties d'un ensemble ordonné admettent-t-elles toujours une borne supérieure ? Justifier.*

Question 28 *[1] La borne supérieure d'une partie appartient-elle toujours à cette partie ? Justifier.*

Question 29 *[1] On suppose que les bornes supérieures de deux parties* A *et* B *d'un ensemble ordonné existent. Si* $A \subset B$*, montrer que* $\operatorname{Sup} A \leq \operatorname{Sup} B$*. Que peut-on dire de* $\operatorname{Inf} A$ *et* $\operatorname{Inf} B$ *?*

Question 30 *[1] Soit* A *une partie d'un ensemble ordonné* $(E, \leq)$*. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) $m = \operatorname{Max} A$,
(2) $m = \operatorname{Sup} A$ *et* $m \in A$.

Question 31 *[1] Soit* A *une partie d'un ensemble* *totalement* *ordonné* $(E, \leq)$*. Montrer que* M *est la borne supérieure de* A *si et seulement si* M *vérifie les conditions :*

$$\begin{cases} \forall x \in A \quad x \leq M & (1) \\ \forall M' \in E \quad M' < M \Rightarrow \exists x \in A \quad M' < x. & (2) \end{cases}$$

Question 32 *[1] Enoncez la caractérisation de la borne supérieure d'une partie de* $\mathbb{R}$*, puis démontrez-la rigoureusement.*

Question 33 *[1] Existe-t-il une relation d'ordre total sur* $\mathbb{C}$ *? Justifiez votre réponse.*

Question 34 *[1] On muni l'ensemble* $\mathbb{C}$ *de l'ordre lexicographique. En notant indifféremment* $z = x + iy$ *ou* $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *un point de* $\mathbb{C}$*, cet ordre, noté* $\preceq$*, est défini en posant :*

$$(x, y) \preceq (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq x' \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \leq y'. \end{cases}$$

a) La restriction de cette relation d'ordre à $\mathbb{R}$ *induit-elle l'ordre usuel sur* $\mathbb{R}$ *?*

b) Représenter graphiquement la partie $\mathcal{P} = \{(X, Y) \in \mathbb{C} \,/\, (X, Y) \preceq (x, y)\}$ *où* (x, y) *désigne un couple de réels donné à l'avance.*

c) La propriété : « si $(x, y) \in \mathbb{C}$*, si* $\{(X_n, Y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de* $\mathbb{C}$ *qui converge vers* (α, β)*, et si* $(X_n, Y_n) \preceq (x, y)$ *pour tout* n*, alors* $(\alpha, \beta) \preceq (x, y)$ *» est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.*

1.5 Entiers naturels

Question 35 *[1] Quels sont les axiomes de l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels ?*

Question 36 *[1] Enoncez la propriété qui est à l'origine du raisonnement par récurrence. Pouvez-vous la démontrer ? Expliquez.*

Question 37 *[1] Est-il vraiment convenable d'utiliser l'expression "principe de récurrence" pour parler du raisonnement par récurrence ?*

Question 38 *[1] Montrer que toute suite décroissante de* $\mathbb{N}$ *est stationnaire.*

Question 39 *[1] (Division euclidienne dans* $\mathbb{N}$*) Pour tout couple* (a, b) *de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$*, montrer qu'il existe un et un seul couple* (q, r) *de* $\mathbb{N}^2$ *tel que* $a = bq + r$ *et* $0 \leq r < b$.

Question 40 *[1] Proposez un algorithme très simple qui permet de calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de* a *par* b *lorsque* a *et* b *sont des entiers naturels, et* $b \neq 0$*. Cet algorithme est une « descente de Fermat ». Démontrez que cet algorithme s'achève au bout d'un nombre fini de pas.*

Question 41 *[1] (Système de numération en base* b*) Soit* b *un entier supérieur ou égal à* 2*. Montrer que tout entier naturel non nul* a *s'écrit de façon unique sous la forme* $a = a_n b^n + ... + a_1 b + a_0$ *où* $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0, 1, ..., b-1\}$ *pour tout* i*, et* $a_n \neq 0$.

Question 42 *[1] Recherchez l'écriture de* 35 *en base* 3*. Expliquez votre algorithme. Justifiez que votre algorithme converge à coup sûr.*

Question 43 *[1] Le nombre* 3^{100} *est un grand nombre. Comment possède-t-il de chiffres ?*

Question 44 *[1] Expliquer comment calculer explicitement les sommes :*

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \textit{et} \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

1.6 Construction de $\mathbb{Z}$

Question 45 *[1] Comment construire le groupe* $(\mathbb{Z}, +)$ *des entiers relatifs à partir de l'ensemble* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels ?*

Question 46 *[1] Comment définit-on la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{Z}$? Vérifier que la relation d'ordre ainsi définie dans $\mathbb{Z}$ généralise la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{N}$.*

Question 47 *[1] Montrer que $\mathbb{Z}$ est archimédien.*

Question 48 *[1] Montrer que la relation d'ordre $\leq$ définie sur $\mathbb{Z}$ à partir de celle de $\mathbb{N}$, est compatible avec l'addition et la multiplication, autrement dit que :*

$$\begin{array}{lll} (1) & \forall\,(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3 & x\leq y \;\Rightarrow\; x+z\leq y+z, \\ (2) & \forall\,(x,y,z)\in\mathbb{Z}^2\times\mathbb{N} & x\leq y \;\Rightarrow\; xz\leq yz. \end{array}$$

Question 49 *[1] Montrer que toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) de $\mathbb{Z}$ est stationnaire.*

Question 50 *[1] Montrer que toute partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément (resp. un plus petit élément).*

Question 51 *[1] (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$) Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, montrer qu'il existe un et un seul couple (q,r) de $\mathbb{Z}^2$ tel que $a=bq+r$ et $0\leq r<|b|$.*

1.7 Rudiments de cardinalité

Question 52 *[1] Quand dit-on que deux ensembles sont équipotents ?*

Question 53 *[1] Quand dit-on qu'un ensemble est fini ?*

Question 54 *[1] Qu'appelle-t-on cardinal d'un ensemble fini ? On proposera une définition précise, et l'on montrera que cette définition a bien un sens.*

Question 55 *[1] Qu'est-ce qu'un ensemble dénombrable ? Qu'est-ce qu'un ensemble au plus dénombrable ?*

> Dans les questions qui suivent, le cardinal d'un ensemble fini E est noté $|E|$ au lieu de $\mathrm{Card}\,E$.

Question 56 *[1] Montrer que toute partie E d'un ensemble fini F est finie et que $|E|\leq|F|$.*

Question 57 *[1] Montrer que la réunion de deux parties finies et disjointes est un ensemble fini de cardinal la somme des cardinaux de ces parties.*

Question 58 *[1] Deux ensembles E et F sont finis, de même cardinal, et tels que $E \subset F$. Montrer que $E = F$.*

Question 59 *[1] Si $f : E \to F$ est une application injective d'un ensemble E dans un ensemble fini F, montrer que E est fini et que $|E| \leq |F|$.*

Question 60 *[1] Si $f : E \to F$ est une surjection d'un ensemble fini E sur un ensemble F, montrer que F est fini et que $|E| \geq |F|$.*

Question 61 *[1] Montrer qu'une application injective entre deux ensembles finis de même cardinal est une bijection.*

Question 62 *[1] Montrer qu'une application surjective entre deux ensembles finis de même cardinal est une bijection.*

Question 63 *[1] On note $E_1 \times ... \times E_m$ le produit cartésien des ensembles finis E_i $(i = 1, ..., m)$. Montrer que l'ensemble $E_1 \times ... \times E_m$ est fini et :*

$$|E_1 \times ... \times E_m| = |E_1| \times ... \times |E_m| \, .$$

Question 64 *[1] Montrer que toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.*

Question 65 *[1] Soit $f : E \to F$ une application injective d'un ensemble E dans un ensemble dénombrable F. Montrer que E est au plus dénombrable.*

Question 66 *[1] Soit $f : E \to F$ est une application surjective définie sur un ensemble dénombrable E. Montrer que F est au plus dénombrable.*

Question 67 *[1] Montrer que le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.*

Question 68 *[1] Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. En déduire que le corps $\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

Question 69 *[1] Montrer qu'une réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. Que dire d'une réunion finie d'ensembles dénombrables ? Que dire d'une réunion dénombrable d'ensembles finis ?*

Question 70 *[1] Montrer que l'ensemble des suites finies d'entiers est dénombrable.*

Question 71 *[1] Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

1.8 Dénombrement

Question 72 *[1]* ***(Principe de la somme)*** *Si* $\{E_1, ..., E_m\}$ *est une partition d'un ensemble fini* E*, alors* $|E| = |E_1| + ... + |E_m|$.

Question 73 *[1]* ***(Principe du produit)*** *Que veut-on dire quand on parle de « principe du produit » au sujet d'un dénombrement ? Pouvez-vous démontrer ce principe ?*

Question 74 *[1]* ***(Principe du berger)*** *Enoncez et démontrer le principe du berger.*

Question 75 *[1]* ***(Principe d'exclusion-inclusion)*** *Si* A *et* B *sont deux parties d'un ensemble fini* E*, montrer que* $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. *Pouvez-vous proposer, sans démonstration, une généralisation ?*

Question 76 *[1] On entend dire qu'un seul principe serait à l'origine de toutes les techniques de dénombrement. Est-ce celui de la somme ? Du produit ? S'agit-il du principe d'exclusion-inclusion ou de celui du berger ? Argumentez.*

Question 77 *[1] Démontrer la formule* $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ *en utilisant un dénombrement.*

Question 78 *[1] On considère le mot DENOMBREMENT.*

a) Combien existe-t-il d'anagrammes de ce mot ?

b) Combien y-a-t-il d'anagrammes dont les lettres E ne sont pas placées consécutivement ?

c) Combien y-a-t-il d'anagrammes dont les lettres sont dans l'ordre croissant alphabétiquement ?

Question 79 *[1] Combien existe-t-il de parties d'un ensemble fini* E *de cardinal* n *? Combien existe-t-il de parties de cet ensemble dont le cardinal est pair ? impair ?*

Question 80 *[1] Dans un jeu de* 32 *cartes, combien existe-t-il de mains de cinq cartes qui contiennent exactement une reine et deux valets ? Quelle est la probabilité d'obtenir ce jeu ?*

Question 81 *[1] Soit* r *est un entier positif donné. Déterminer le nombre de solutions entières positives de l'équation* $\alpha_1 + ... + \alpha_n = r$ *d'inconnues* α_1*, ...,* α_n.

Question 82 *[1] **(Arrangements et combinaisons)***
On rappelle qu'un arrangement de p éléments d'un ensemble E *est une suite de* p *éléments de* E *dont tous les éléments sont deux à deux distincts, et qu'une* combinaison de p éléments de E *est une partie à* p *éléments dans* E*. Montrer que, dans un ensemble fini de cardinal* n*, il existe :*

$$A_n^p = n\,(n-1)\,...\,(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

arrangements de p *éléments, et :*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

combinaisons de p *éléments.*

Question 83 *[1] De combien de façons peut-on placer* 7 *boules de couleurs différentes dans* 3 *tiroirs ?*

Question 84 *[1] Douze personnes mangent à une table de douze couverts. Combien obtient-on de dispositions possibles de ces personnes les unes par rapport aux autres ?*

Question 85 *[1] Combien peut-on trouver de nombres qui s'écrivent :*
a) avec au plus n *chiffres ?*
b) avec exactement n *chiffres ?*
c) avec n *chiffres tous distincts les uns des autres deux à deux ?*

Question 86 *[1] Combien peut-on former d'entiers de trois chiffres contenant au moins l'un des chiffres* 0, 3, 6 *ou* 9 *?*

Chapitre 2

Suites & séries

Question 87 *[8] (Ecrit du CAPES 2015) On s'intéresse à des suites réelles :*

a) Montrer qu'une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

b) Montrer qu'une suite croissante et majorée converge.

c) Établir une CNS pour qu'une suite décroissante soit convergente.

Question 88 *[8] Une suite réelle (u_n) est dite négligeable devant une autre suite réelle (v_n), et l'on note $u_n \prec\prec v_n$, lorsque :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \;\Rightarrow\; |u_n| \leq \varepsilon\, |v_n|\,.$$

Soient a et b deux réel tels que $a > 1$ et $b > 0$. Montrer que :

$$\ln n \prec\prec n^b \prec\prec a^n \prec\prec n! \prec\prec n^n.$$

Question 89 ***(Critère de d'Alembert pour les suites)***
Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Montrer que :

a) Si $l < 1$, $\lim u_n = 0$.

b) Si $l > 1$, $\lim u_n = +\infty$.

c) Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

2) On écrit $u_n \prec\prec v_n$ pour signifier que la suite réelle (u_n) est négligeable devant la suite réelle (v_n). Démontrer que $n^b \prec\prec a^n \prec\prec n! \prec\prec n^n$ lorsque $a > 1$ et $b > 0$.

3) Soient $(a,p) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $\lim(ap^{2n+1}/n!) = 0$.

Question 90 *[8] Montrer que toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ est bornée.*

Question 91 *[8] On suppose que la suite réelle $(x_n)_n$ vérifie la propriété :*

$$\exists k \in \,]0,1[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x_n| \leq k^n.$$

Montrer que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Question 92 *[8] Donner un exemple d'une suite de points $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}$ bornée et d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle la suite des images $(f(x_n))_n$ n'est pas bornée.*

Question 93 *[8] Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne. Si $(x_n)_n$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$, montrer qu'il en est de même de la suite $(g(x_n))_n$.*

Question 94 *[8] Donner deux exemples de fonctions $f : E \to F$ uniformément continues sur E non nulles et non polynomiales.*

Question 95 *[8] Soit $f : E \to F$ uniformément continue sur E, où E et F sont deux espaces métriques. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de points de E, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de points de F.*

Question 96 *[8]* ***(Convergence au sens de Cesàro)***

1) Soit (u_n) une suite de complexes convergeant vers une limite l.

a) Montrer que la suite (v_n) de terme général précisé ci-dessous, tend aussi vers l. :

$$v_n = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}.$$

b) On dit que la suite (u_n) converge au sens de Césaro si la suite (v_n) définie ci-dessus est convergente. Montrer qu'une suite peut converger au sens de Césaro sans être pour autant convergente.

Question 97 *[8] Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Question 98 *[8] Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$ converge vers e^x quel que soit le nombre réel x. Démontrer que cette convergence est uniforme sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.*

Question 99 *˜[8] On considère la suite (u_n) de terme général :*

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction :

$$f(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right),$$

montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$.

Question 100 *[7] a) Discuter la convergence de la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs prises par le nombre réel a.*

b) Si a est un nombre complexe de module 1 et différent de 1, montrer que la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

c) Soit $a \in \mathbb{C}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Question 101 *[7] Etudier la convergence des suites* $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque* $\theta \in \mathbb{R}$.

Question 102 *[7] Etudier la convergence des suites* $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque* $\theta \in \mathbb{R}$. *Que dire des suites* $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ *?*

Question 103 *[6] Soit* $a \in \mathbb{R}_+^*$. *Montrer de deux façons différentes que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Question 104 *[6] (Ecrit du CAPES externe 2012) Soit* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite de terme général* $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. *Montrer que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

En déduire que $H_n \sim \ln n$ *au voisinage de* $+\infty$.

Question 105 *[6] (Ecrit du CAPES externe 2012)*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en utilisant des outils de terminale scientifique. On ne demande pas de calculer cette limite.*

Question 106 *[6] On considère deux séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *à termes réels. On suppose que* v_n *est positif pour tout entier* n, *et que la série* $\sum v_n$ *est convergente. Montrer qu'au voisinage de* $+\infty$ *:*

$$u_n \sim v_n \quad \Rightarrow \quad \sum\nolimits_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum\nolimits_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

En déduire un équivalent de la suite $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} 1/k^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *On pourra par exemple utiliser l'identité :*

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k\,(k+1)}.$$

Question 107 *[6] Soit* α *un réel strictement supérieur à* 1. *En comparant les différents restes* $\sum_{k=n}^{+\infty} 1/k^\alpha$ *aux intégrales* $\int_n^{+\infty} 1/t^\alpha\, dt$, *trouver un équivalent de la suite* $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} 1/k^\alpha\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *au voisinage de* $+\infty$.

Question 108 *˜[8] [Possibilité de question enchaînées à partir de cette séquence extraite de l'écrit du CAPES 2015) Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite réelle indexée sur* $\mathbb{N}^*$. *On admet que l'on connaît le résultat principal concernant la convergence au sens de Cesàro [exercice traité dans [8]].*

1) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge, montrer que la suite* $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge.*

2) On suppose que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers un réel* l.

a) Montrer que la suite $(x_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge et préciser sa limite.*

b) Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *lorsque* $l \neq 0$.

c) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est-elle nécessairement convergente quand* $l = 0$ *?*

Question 109 *[8] (Ecrit du CAPES 2015) Soit* α *un nombre réel non congru à* 0 *modulo* π. *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha$$

est convergente et déterminer sa limite.

Chapitre 3

Fonctions

3.1 Généralités

Question 110 *[6](Ecrit du CAPLP 2012) Soient deux réels a et b tels que $ab > 0$. On écrit alors $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. Est-ce vrai ou faux ? Justifier.*

Question 111 *[8] Soit $a \in \mathbb{R}$. Comment démontrer que la courbe représentative d'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormal est :*
a) symétrique par rapport au point $A(a, f(a))$?
b) symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$?
Ces résultats restent-ils vrais si le repère n'est plus orthonormal ?

3.2 Limites

Question 112 *Peut-on trouver une suite (f_n) de fonctions positives, définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers la fonction nulle mais dont l'aire sous la courbe de f_n tende vers $+\infty$? Justifiez votre réponse.*

Question 113 *Peut-on trouver une suite (f_n) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers la fonction nulle sans que cette convergence soit uniforme ? Justifiez votre réponse.*

Question 114 *[6] (**Théorème de la limite monotone**) Montrer qu'une application $f : I \to \mathbb{R}$ monotone définie sur un intervalle I admet une limite à droite (resp. à gauche) en tout point a de I tel que $I \cap]a, +\infty[\neq \varnothing$ (resp. $I \cap]-\infty, a[\neq \varnothing$).*

Question 115 *[7] Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de I dans $\mathbb{R}$. Soit a un réel appartenant à l'adhérence de I, c'est-à-dire un élément de I ou une borne de I.*

a) Soit $l \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) $\lim_{x\to a} f(x) = l$,
(2) Pour toute suite $(x_n)_n$ de I tendant vers a, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

b) Montre que f admet une limite en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de I admettant a pour limite, la suite $(f(x_n))_n$ est convergente.

c) [Réservé aux agrégatifs] Généraliser les deux résultats précédents lorsque $f : E \to F$ où E et F sont des espaces plus généraux à préciser.

Question 116 *[5] Soit a un réel et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$ possédant une limite finie en $+\infty$.*
a) La fonction f est-elle bornée ?
b) La fonction f est uniformément continue sur $[a, +\infty[$?

3.3 Continuité

Question 117 *[6] Etudier la fonction $f(x) = \sin(1/x)$. Cette fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?*

Question 118 *[6] (Ecrit du CAPES externe 2012) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}$.*
a) Quand dit-on que f est uniformément continue sur I ?
b) Ecrire à l'aide de quantificateurs la proposition « f n'est pas uniformément continue sur I ».

Question 119 *[6] (Ecrit du CAPES externe 2012) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne d'un intervalle réel I dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est uniformément continue sur I.*

Question 120 *[6] (Ecrit du CAPES externe 2012)*
a) Montrer que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ quels que soient les réels x et y.
b) On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|}.$$

Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Question 121 *[6] (Ecrit du CAPES externe 2012)*
a) Montrer que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ et que $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$ quels que soient x et y appartenant à $\mathbb{R}$.
b) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
c) Montrer que la fonction g n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Question 122 *[6] (Ecrit du CAPES externe 2012)* ***Théorème de Heine*** *On désire démontrer le théorème de Heine : si une fonction f est continue sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, alors elle est uniformément continue sur ce segment. Supposons que f soit une fonction continue sur I et non uniformément continue sur I. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de I tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Montrer ensuite que l'on peut extraire des suites précédentes deux sous-suites convergentes $\left(x_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(y_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Conclure.

Question 123 *[8] Montrer que toute application linéaire $l : E \to F$ définie sur un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, à valeurs dans un espace vectoriel normé F, est continue.*

3.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Question 124 *[6]* ***(Théorème des valeurs intermédiaires)*** *Démontrer que l'image d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une application continue $f : I \to \mathbb{R}$ est un intervalle.*

Question 125 *[6] Quel intérêt y-a-t-il à démontrer le Théorème des valeurs intermédiaires en utilisant la méthode de dichotomie ?*

Question 126 *[6] D'où vient le terme dichotomie ?*

Question 127 *[6] Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et si $M = \operatorname{Sup} f([a, b])$, on sait qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a, b]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = M$. Pouvez-vous démontrer ce résultat ?*

Question 128 *[6] Montrer qu'une application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.*

Question 129 *[6] Montrer que l'image d'un segment par une application continue est un segment.*

Question 130 *[6] Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application continue. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.*

Question 131 *[6] Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application monotone définie sur un intervalle réel I. Si $f(I)$ est un intervalle, montrer que f est continue.*

Question 132 *[6] Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que f est injective. Démontrer qu'elle est strictement monotone (on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires).*

3.5 Dérivabilité

Question 133 *[6] Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle I. Peut-on affirmer que, si f est continue en a, alors f est dérivable en a ? Justifiez votre réponse complètement.*

Question 134 *[8] (Oral du CAPES 2008)* ***Dérivée d'une fonction composée*** *– Enoncez puis démontrez le théorème de dérivation des fonctions composées dans le cadre de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.*

Question 135 *[6] Montrer que la fonction $f(x) = x\sin(1/x)$ définie sur $\mathbb{R}^*$, est prolongeable par continuité en 0, mais que la fonction $\widehat{f}$ obtenue n'est pas dérivable en 0. Donnez l'allure de la courbe représentative de f.*

Question 136 *[6] Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$ sinon. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que sa fonction dérivée f' n'est pas continue en 0. Tracer l'allure de la courbe représentative de f, et montrer que cette courbe est tangente à la parabole $y = x^2$ en chaque point de contact. Préciser le comportement de f au voisinage de $+\infty$.*

Question 137 *[6] Calculer* $\arctan x + \arctan(1/x)$.

Question 138 *[6] Montrer que* $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ *pour tout x appartenant à $[-1,1]$.*

Question 139 *[6] Calculer* $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

Question 140 *[6] Calculer la limite de la fonction :*

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

quand x tend vers 0 en utilisant la règle de l'Hôpital, puis vérifier le résultat obtenu en utilisant des développements limités.

Question 141 *[8] (Ecrit du CAPLP 2015) Soient f et g deux fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = g(0)$. Peut affirmer que $f'(0) \leq g'(0)$? Justifiez votre réponse.*

Question 142 *[8] (Ecrit du CAPLP 2015) Soient f et g deux fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = g(0)$. Peut-on affirmer que $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? Justifiez votre réponse.*

Question 143 *[8] (Ecrit du CAPLP 2015) Soient f et g deux fonctions réelles dérivables sur tout $\mathbb{R}$ qui vérifient $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $f(0) = g(0)$. Dans ce cas, peut-on affirmer que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$? Justifiez votre réponse.*

3.6 Théorème des fonctions réciproques

Question 144 *[6]* ***(Théorème des fonctions réciproques)***
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. Montrer que :

a) J est un intervalle,

b) f induit une bijection de I sur J,

c) $f^{-1} : J \to I$ est continue strictement monotone de même sens que f.

d) Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Question 145 *[6] Comment faire pour démontrer que la fonction* $\arcsin x$ *est dérivable (sur un certain intervalle où elle est définie) et expliciter sa fonction dérivée ? Expliquez complètement.*

Question 146 *[6] Comment définissez-vous la fonction racines n-ièmes ? Comment démontrer que la fonction $\sqrt[n]{x}$ est dérivable et calculer sa dérivée ? Comment définir la fonction $x \mapsto x^r$ lorsque $r \in \mathbb{Q}$?*

Question 147 *[6] Montrer qu'un intervalle $[a, b[$ (avec a, b réels tels que $a < b$) est homéomorphe à $[0, 1[$ et à $[0, +\infty[$.*

Question 148 *[6] Dessinez à main levée les représentations graphiques des fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique et tangente hyperbolique. Sur quels intervalles ces fonctions sont-elles des bijections ? Comment obtenir le graphe de la fonction* $\operatorname{argth} x$ *?*

Question 149 *[6] On note $g = f^{-1}$ la fonction réciproque d'une fonction f strictement monotone d'un intervalle I sur un autre intervalle J. On suppose que f est trois fois dérivable sur I, et que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que g est trois fois dérivable sur J. Calculer les dérivées g', g'' et g''' successives de g en fonction de f et de ses dérivées.*

3.7 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Question 150 *[6] a) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On suppose que f admet un extrémum en c. Montrer que $f'(c) = 0$.*

b) La réciproque est-elle vraie ?

c) Le résultat démontré en a) reste-t-il vrai si c n'est qu'un extremum relatif de f ? Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$?
On justifiera soigneusement ses réponses.

Question 151 *[6] **(Théorème de Rolle)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

On commencera par traiter le cas où $f(a) = f(b)$.

Question 152 *[6] Enoncez le Théorème de Rolle, encore connu sous le nom de formule (ou Théorème) des accroissements finis, pour une fonction réelle de la variable réelle. Proposez une interprétation géométrique de ce résultat.*

Question 153 *[6] Le Théorème de Rolle reste-t-il vrai si la fonction dont on parle dans ce théorème n'est plus une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, ou encore de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$?*

Question 154 *([11], Th. 16) Démontrer rigoureusement le théorème qui lie les variations d'une fonction à l'étude du signe de sa dérivée.*

Question 155 *[6] Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles, continues sur $[a,b]$, et dérivables sur $]a,b[$. Montrer que :*

$$\left(\forall x \in]a,b[\quad g'(x) \leq f'(x)\right) \Rightarrow (\forall x \in]a,b[\quad g(x) - g(a) \leq f(x) - f(a))$$

Question 156 *[6] Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :*

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Question 157 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de l'intérieur de I. Montrer que f est une fonction constante et seulement si sa dérivée f' est nulle à l'intérieur de I.*

Question 158 *[6] En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que* $\sin x \leq x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$. *Intégrer ensuite cette inégalité pour démontrer que :*

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x.$$

Quelles encadrements des fonctions sinus et cosinus pouvons-nous démontrer de cette manière ? [On indiquera, sans démonstration, un ensemble de formule que l'on peutt obtenir avec cette méthode.]

Question 159 *[6] Montrer que toute droite qui coupe la sinusoïde* $y = \sin x$ *en au moins deux points distincts est de pente comprise entre* -1 *et* 1.

Question 160 *[6] Montrer de deux façons différentes que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Question 161 *[6] (Ecrit de Polytechnique 1990) Pour tout réel* $x > 1$ *montrer que :*

$$\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\left(x-1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.8 Théorème du point fixe

Question 162 *[6]* ***(Théorème du point fixe)***
Montrer qu'une application contractante f *d'un espace métrique complet non vide* (E, d) *dans lui-même possède un unique point fixe. Si une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est construite par récurrence en choisissant n'importe quel premier terme* x_0 *dans* E, *puis en posant* $x_{n+1} = f(x_n)$ *pour tout* n, *montrer que cette suite converge vers l'unique point fixe de* f.

Question 163 *[6] Soit* f *une application de l'intervalle* $I = [a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *dans lui-même, dérivable sur* I, *telle qu'il existe* $k \in]0, 1[$ *pour lequel* $|f'(x)| \leq k$ *quel que soit* x *appartenant à* I. *Montrer que :*

(1) L'application f *admet un unique point fixe dans* I.

(2) Pour tout $x_0 \in I$, *la suite* (x_n) *de premier terme* x_0 *et définie par récurrence en posant* $x_{n+1} = f(x_n)$ *quel que soit* $n \in \mathbb{N}$, *converge vers le point fixe de* f.

3.9 Intégration

Question 164 *[8] (Primitive d'une fonction continue) Soit f une application d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On pose :*

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

ce qui définit une application F de I dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose f localement intégrable au sens de Riemann sur I. Montrer que F est continue sur I.

b) On suppose f continue sur I. Montrer que F est dérivable sur I et $F' = f$.

[Autre façon de poser la question : « démontrer qu'une fonction continue sur un intervalle et à valeurs réelles admet une primitive sur cet intervalle ».]

Question 165 *[8] Soit f une fonction continue d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Si $x \in I$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Lorsque f est positive et monotone sur I, démontrer que F est dérivable sur I comme on le ferait dans un cours de terminale S.*

Question 166 *[8] Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

a) Montrer que f admet au moins une primitive F sur I.

b) Montrer que f admet une infinité de primitives sur cet intervalle et que ces primitives sont toutes de la forme $x \mapsto F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

c) Montrer qu'il existe une et une seule primitive de f prenant une valeur donnée y_0 en un point x_0 de I. Donner une expression de cette primitive.

d) Montrer qu'il existe une et une seule primitive de f qui s'annule en x_0. Donner une expression de cette primitive.

e) Montrer que :

$$\forall a, b \in I \quad \int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

[Autre façon de poser la question : « démontrer qu'une fonction continue sur un intervalle et à valeurs réelles admet une primitive sur cet intervalle, puis déterminer toutes les primitives de cette fonction sur cet intervalle. ».]

Question 167 *[6] Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[2; 5]$. Si $\int_2^5 f(x)\, dx \leq \int_2^5 g(x)\, dx$, alors peut-on dire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[2; 5]$, on a $f(x) \leq g(x)$? Justifiez votre réponse complètement.*

Question 168 *[6] Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction définie, continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors f est nulle sur l'intervalle $[a, b]$. Vrai ou faux ? Justifier.*

Question 169 *[6] (Ecrit du CAPLP 2012) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction définie, continue par morceaux et positive sur l'intervalle $[a, b]$ et si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors f est nulle sur l'intervalle $[a, b]$. Vrai ou faux ? Justifier.*

Question 170 *[7] Rappeler et démontrer la formule de changement de variables pour une fonction réelle d'une variable réelle.*

Question 171 *[8] (Ecrit du CAPLP 2015) Si n est entier naturel, on note :*

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

Peut-on dire que pour tout entier naturel n, le nombre I_n existe et vaut $n!$? Justifiez votre réponse.

Question 172 *[6] On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, que l'on note $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$. On suppose aussi que f admet une primitive F sur un intervalle ouvert I contenant 0. En utilisant le Théorème des accroissements finis, démontrer que F admet le développement limité suivant à l'ordre n en 0 :*

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + ... + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

3.10 Fonctions de plusieurs variables

Question 173 *[8] Soient m et n deux entiers strictement positifs, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Montrer que toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ différentiable en un point a de Ω est continue en ce point.*

Question 174 *[8] Soit f la fonction norme euclidienne définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Montrer de deux façons différentes que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Question 175 *[3] Montrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré 2 à deux variables est négligeable devant $h^2 + k^2$ (au voisinage de $(0, 0)$) si et seulement si c'est le polynôme nul.*

Question 176 *[3] Soit n un entier naturel non nul. Soit $P(x_1, ..., x_n)$ un polynôme à coefficients réels à n indéterminées x_1, ..., x_n et de degré m. Montrer que $P(x_1, ..., x_n) = o(\|(x_1, ..., x_n)\|^m)$ (au voisinage de $(0, ..., 0)$) si et seulement si c'est le polynôme nul.*

3.11 Equations différentielles

Question 177 *[6] On considère l'équation différentielle suivante, où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:*

$$y' - 2y - 1 = 0. \quad (E)$$

On note g une fonction positive définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Peut-on affirmer que, si g est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$, alors g est croissante sur $\mathbb{R}$? Justifiez votre réponse complètement.

Question 178 *[6] Soit $a \in \mathbb{R}$. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$? Démontrez complètement ce que vous affirmez.*

Question 179 *[6] Déterminez toutes les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle $y' + 5y + 8 = 0$.*

Question 180 *[6] Soient a et b deux réels. On considère l'équation différentielle :*

$$(E) \quad y'' + ay' + by = 0.$$

Montrer qu'une solution de (E), a priori seulement deux fois dérivable, sera en fait indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Question 181 *[6] Soient a et b deux réels. On considère l'équation différentielle :*

$$(E) \quad y'' + ay' + by = 0.$$

On note $S_{\mathbb{R}}$ (resp. $S_{\mathbb{C}}$) l'ensemble des solutions réelles (resp. complexes) de (E), définies sur tout $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Montrer que $S_{\mathbb{R}}$ et $S_{\mathbb{C}}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, suivant le cas.

Question 182 *[6] Soient a et b deux réels. Montrer que les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ coïncident avec les parties réelles des solutions complexes de cette équation.*

Question 183 *[6] On considère une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants :*

$$(E) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = f(x)$$

où les a_i appartiennent à $\mathbb{C}$ et où $f(t)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On demande de répondre très précisément aux questions suivantes sans démontrer quoi que ce soit, donc en faisant référence au cours que l'on a appris.

a) Quelle est la structure générale des solutions de (E) ?

b) Qu'appelle-t-on équation sans second membre associée à (E) ? On appellera (H) cette équation sans second membre.

c) Qu'appelle-t-on équation caractéristique de (H) *?*

d) Quelle est la forme générale des solutions de (H) *? Que peut-on dire de celles-ci ?*

e) Lorsque $f(x) = Q(x)\,e^{\mu x}$ *où* $\mu \in \mathbb{C}$ *et où* $Q(x)$ *est un polynôme en* x*, sous quelle forme peut-on chercher une solution particulière de* (E) *?*

Question 184 *[6] Résoudre l'équation différentielle* $y'' - 7y' + 10y = 0$.

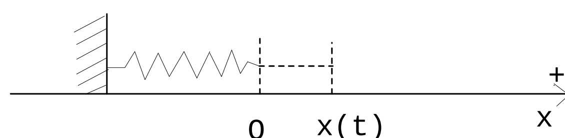
Question 185 *[6] Résoudre l'équation différentielle* $y'' - 16y' + 64y = 0$.

Question 186 *[6] Résoudre l'équation différentielle* $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Question 187 *[6] Soit* $\omega \in \mathbb{R}_+^*$*. Pouvez-vous dire quelles sont les solutions de l'équation différentielle* $y'' = -\omega^2 y$ *? Justifiez complètement ce que vous affirmez. On vous autorise à utiliser un théorème général du cours sans avoir à le démontrer.*

Question 188 *[6] Parlons un peu de mouvements oscillatoires.*

a) Sur un oscillateur mécanique, une masse ponctuelle m *est placée à l'extrémité d'un ressort de raideur* k $(k \in \mathbb{R}_+^*)$ *de façon à pouvoir coulisser sans frottements sur un axe horizontal* Ox*, comme sur la figure ci-dessous. On note* $x(t)$ *l'abscisse de la masse* m *à la date* t*, et l'on suppose que le ressort est dans sa position d'équilibre quand* $x(t) = 0$*, c'est-à-dire quand la masse* m *est à l'origine* O *du repère de* Ox*. On tire la masse jusqu'à un point d'abscisse* x_0*, puis on la relâche à la date* t_0*. Déterminez l'équation horaire du mouvement de la masse* m*.*



b) On suppose maintenant qu'il existe une force de frottement dû à l'air. Pour cela on rajoute des ailerons à la masse m*. On suppose que la force de résistance* $\overrightarrow{f}$ *dû à l'air est proportionnelle à la vitesse* $\overrightarrow{v}$ *du solide, ce qui s'écrit* $\overrightarrow{f} = -r\overrightarrow{v}$ *où* r *est une constante réelle strictement positive. Déterminez la nouvelle équation horaire qui régit le mouvement.*

c) Les résultats obtenus correspondent-ils à notre intuition ?

Chapitre 4

Algèbre

4.1 Groupes

Question 189 *[1] Soit G un groupe noté multiplicativement. Donner deux caractérisations d'un sous-groupe de G.*

Question 190 *[1] Soit $(G, .)$ un groupe noté multiplicativement. Soit Λ une partie non vide de G. Expliciter le sous-groupe de G engendré par Λ. Justifier.*

Question 191 *[1] Soit x un élément d'un groupe G. Quand dit-on que x est un élément d'ordre fini ? Qu'appelle-t-on ordre d'un élément de G ? (On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit.)*

Question 192 *[1] Soient x un élément d'ordre fini ω d'un groupe G (noté multiplicativement et d'élément neutre e) et $p \in \mathbb{Z}$.*
a) Montrer que $x^p = e$ si et seulement si ω divise p.
b) En déduire que, si G est fini d'ordre n, alors $x^n = e$ pour tout $x \in G$.

Question 193 *[1] Si x est un élément d'ordre fini $\omega(x)$ d'un groupe G (noté multiplicativement) et si $t \in \mathbb{Z}$, montrer que :*

$$\omega\left(x^t\right) = \frac{\omega(x)}{\operatorname{pgcd}(t, \omega(x))}.$$

Question 194 *[1] Soient b_1, b_2 deux éléments d'ordres finis d'un groupe commutatif G noté multiplicativement. On note $\omega(x)$ l'ordre d'un élément x de G. Montrer l'implication :*

$$\operatorname{pgcd}(\omega(b_1), \omega(b_2)) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega(b_1 b_2) = \omega(b_1)\,\omega(b_2).$$

Question 195 *[1] Quand dit-on qu'une application $f : (G, .) \to (G', .)$ entre deux groupes est un homomorphisme de groupes ?*

Question 196 *[1] Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes multiplicatifs, démontrer que les éléments neutres de G et G' se correspondent par f, et que $f\left(x^{-1}\right) = f(x)^{-1}$ pour tout $x \in G$.*

Question 197 *[1] Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes multiplicatifs, montrer que f est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.*

Question 198 *[1] Soit $f : G \to E$ une bijection d'un groupe $(G, \top)$ sur un ensemble E. Montrer qu'il existe une et une seule structure de groupe sur E pour laquelle f est un isomorphisme de groupes.*

Question 199 *[1] Soit $f : (G, \top) \to (G', \star)$ un morphisme bijectif de groupes. Montrer que f^{-1} est encore un morphisme de groupes.*

Question 200 *[1] Soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre e. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur G. Si $x \in G$, on désigne par $\overline{x}$ la classe de x dans $G/\mathcal{R}$. A quelle condition peut-on définir une loi interne sur l'ensemble-quotient $G/\mathcal{R}$ en posant $\overline{x} \,.\, \overline{y} = \overline{xy}$?*

Question 201 *[1] Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un groupe commutatif G noté multiplicativement. Si $\mathcal{R}$ est compatible avec la loi du groupe, montrer qu'il s'agit d'une relation suivant un sous-groupe. La réciproque est-elle vraie ?*

Question 202 *[1] Vous avez dit que la relation de congruence dans $\mathbb{Z}$ était une relation d'équivalence compatible avec l'addition et la multiplication. En connaissez-vous d'autres sur $\mathbb{Z}$ qui soient également compatibles avec l'addition et la multiplication ?*

Question 203 *[1] Enoncez puis démontrez le théorème de décomposition canonique d'un isomorphisme de groupes.*

Question 204 *[1] Montrer que l'ordre de tout sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre de ce groupe (Théorème de Lagrange). Si H est un sous-groupe d'un groupe fini G, que désigne-t-on par l'indice de H dans G ?*

Question 205 *[1] Qu'est-ce qu'un groupe cyclique ?*

Question 206 *[1] Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède n éléments.*

Question 207 *[1] Que représentent $\mathbb{Z}/0\mathbb{Z}$? $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$?*

Question 208 *[1] Montrer qu'un groupe est cyclique si, et seulement si, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ où $m \in \mathbb{N}^*$.*

Question 209 *[1] Soient n un entier naturel différent de 0 et de 1. Soit d un diviseur positif de n. Montrer qu'il existe un et un seul sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d.*

Question 210 *[1] Définir le groupe des permutations $\mathcal{S}(E)$ d'un ensemble E, puis le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ de degré n. Montrer que les groupes $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}(F)$ sont isomorphes dès que les ensembles E et F sont équipotents.*

Question 211 *[1] Démontrer que tout groupe d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}_n$ des permutations d'un ensemble à n éléments (Théorème de Cayley).*

4.2 Anneaux et corps

Question 212 *{[1] Qu'est-ce qu'un anneau ?*

Question 213 *{[1] Soient a et b deux éléments d'un anneau commutatif A, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $b^n - a^n$ est divisible par $b - a$. Donner le quotient de $b^n - a^n$ par $b - a$ sous forme de somme.*

Question 214 *{[1] Quand dit-on qu'un anneau est intègre ?*

Question 215 *[1] Quand dit-on qu'un anneau est principal ?*

Question 216 *[1] Quand dit-on qu'un anneau est euclidien ? Donnez deux exemples de tels anneaux.*

Question 217 *[1] Montrer que tout anneau euclidien est principal. Que dire de $\mathbb{Z}$ et de $K[X]$ lorsque K est un corps commutatif ?*

Question 218 *[1] Qu'est-ce qu'un homomorphisme d'anneaux ?*

Question 219 *[1] Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les parties $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire des idéaux de $\mathbb{Z}$?*

Question 220 *[1] Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}$ est archimédien.*

Question 221 *[1] (Oral du CAPES externe 2006)*
Est-ce qu'un corps est intègre ? Justifier votre réponse.

Question 222 *[1] (Oral du CAPES externe 2006)*
Est-ce qu'un anneau intègre est un corps ? Justifier votre réponse.

Question 223 *[1] (Oral du CAPES externe 2006)*
Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps

Question 224 *[1] On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes $a+ib$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est égal au sous-anneau de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{Z}$ et i.*

Question 225 *[1] Quand dit-on que deux éléments d'un anneau intègre A sont associés ? Montrer que a et b sont associés si et seulement si $(a)=(b)$.*

Question 226 *[1] Définir de manière précise le plus grand commun diviseur (pgcd) de deux éléments a et b d'un anneau principal A.*

Question 227 *[1] Peut-on définir le plus grand commun diviseur (pgcd) de deux éléments a et b d'un anneau factoriel A qui n'est pas principal ? Et le ppcm ?*

Question 228 *[1] Définir de manière précise le plus petit commun multiple (ppcm) de deux éléments a et b d'un anneau principal A.*

Question 229 *[7] Montrer que $\operatorname{pgcd}(ka,kb)=k\operatorname{pgcd}(a,b)$ quels que soient les entiers relatifs a, b et k.*

Question 230 *[1] Enoncez et démontrez le Théorème de Bezout.*

Question 231 *[7] On suppose que l'on connaît le Théorème de Bezout. Peut-on énoncer un résultat analogue quand le pgcd de deux entiers a et b est quelconque ? Autrement dit, peut-on affirmer que $\operatorname{pgcd}(a,b)=\delta$ si, et seulement, si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=\delta$? Expliquez, et s'il est possible d'affirmer quelque chose à ce sujet, proposez une démonstration.*

Question 232 *[1] Dans un anneau principal, montrer que si $a\wedge b=1$ et $a\wedge c=1$ alors $a\wedge bc=1$.*

Question 233 *[1] Dans un anneau principal, énoncez le Théorème de Gauss. Montrez-le.*

Question 234 *[1] On suppose que deux éléments a et b d'un anneau principal sont premiers entre eux et divisent c. Montrer que ab divise c.*

Question 235 *[1] Montrer que l'égalité* $\mathrm{pgcd}\,(a,b)\,\mathrm{ppcm}\,(a,b) = ab$ *est vraie dans un anneau principal.*

Question 236 *[1] Définissez ce qu'est un élément irréductible dans un anneau intègre. Quels sont les éléments irréductibles de* $\mathbb{Z}$ *? de* $K[X]$ *lorsque* K *est un corps commutatif ?*

Question 237 *[1] Quand dit-on qu'un anneau est factoriel ?*

Question 238 *[1] Qu'appelle-t-on caractéristique d'un anneau ?*

Question 239 *[1] Quelle est la caractéristique de l'anneau* $\mathbb{Z}$*, de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*, de* $\mathbb{Q}$*, de* $\mathbb{R}$*, de* $\mathbb{C}$ *?*

Question 240 *Quelle est la caractéristique de l'anneau produit* $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ *(où* $a, b \in \mathbb{N}^*$*).*

Question 241 *[1] Soit* A *est un anneau de caractéristique* c*. Montrer que* $cx = 0$ *pour tout élément* x *de* A*.*

Question 242 *[1] Soit* A *est un anneau intègre de caractéristique* c*. Montrer l'équivalence :*

$$nx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (c|n \text{ ou } x = 0).$$

Question 243 *[1] Montrer que la caractéristique d'un corps est soit nulle, soit un nombre premier. En déduire que tout corps fini est de cardinal* p^ξ*, où* p *est un nombre premier et* $\xi \in \mathbb{N}^*$*.*

Question 244 *[1] Soit* $\mathbb{F}_q$ *un corps à* q *éléments* $(q \geq 2)$*. Soit* $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \backslash \{0\}$*. Si* q *est impair, montrer qu'il existe* $(q-1)/2$ *carrés dans* $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q \backslash \{0\}$*. Combien y-a-t-il de carrés dans* $\mathbb{F}_q$ *lorsque* q *est pair ?*

Question 245 *[1] Soit* K *un corps fini de caractéristique* p*. Montrer que* $(a+b)^p = a^p + b^p$ *pour tout* $(a,b) \in k^2$*. En déduire que :*

$$\forall a, b \in k \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (a+b)^{p^i} = a^{p^i} + b^{p^i}.$$

4.3 Polynômes

Question 246 *[1] Soit* A *un anneau commutatif. Soient* $a \in A$ *et* $P \in A[X]$*. Montrer que* a *est une racine de* P *si et seulement si* $X - a$ *divise* P*. On proposera deux preuves de ce résultat.*

Question 247 *[1] Soit K un corps commutatif. Montrer que tout polynôme non nul à coefficients dans K et de degré n possède au plus n racines dans K.*

Question 248 *[1] Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif. Soient A et B deux polynômes de $\mathcal{A}[X]$ tels que B soit non nul et de coefficient dominant inversible dans $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe un unique couple (Q,R) de polynômes dans $\mathcal{A}[X]$ tels que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.*

Question 249 *[1] Soient K un corps commutatif et n un entier naturel. En utilisant le Théorème de Bezout, montrer que si A et B sont deux polynômes de $K[X]$ tels que $B(0) \neq 0$, alors il existe un unique couple (Q,R) de polynômes vérifiant $A = BQ + X^n R$ avec $\deg Q < n$.*

Question 250 *[1] Soit K un corps commutatif de caractéristique 0. Soient $P(X)$ un polynôme de $K[X]$, a un élément de K et k un entier naturel non nul. Quand dit-on que a est une racine d'ordre de multiplicité k de $P(X)$? On proposera trois définitions possibles, et l'on montrera l'équivalence entre ces définitions.*

Question 251 *[1] Soit A un anneau commutatif d'élément unité $\mathbf{1}_A$. Soit n un entier naturel. On suppose que l'élément $(i!)\,\mathbf{1}_A$ est inversible quel que soit l'entier i compris entre 0 et n. Soit $a \in A$. Montrer que tout polynôme $P(X)$ de $A[X]$ de degré inférieur ou égal à n s'écrit sous la forme :*

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!} (X-a)^i$$

où $P^{(i)}(X)$ désigne le i-ième polynôme dérivé de $P(X)$, et où $1/i!$ représente l'inverse de $(i!)\mathbf{1}_A$ dans A.

Question 252 *[2]* ***(Formule de Taylor pour les polynômes)***
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $K_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés $\leq n$ sur un corps commutatif K de caractéristique nulle. Soit a un scalaire. Montrer que la famille $\mathcal{F} = ((X-a)^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $K_n[X]$ et que :

$$\forall P \in K_n[X] \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

Question 253 *[1] Soit K un corps commutatif. Montrer que l'anneau $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K est principal.*

Question 254 *[1] Soit A un anneau unitaire. Notons $A[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans A, et $\mathcal{F}(A,A)$ l'algèbre des applications de A dans A. Considérons l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & A[X] & \to & \mathcal{F}(A,A) \\ & P(X) & \mapsto & \widetilde{P} = (x \mapsto P(x)) \end{array}$$

qui au polynôme $P(X)$ associe la fonction polynomiale $\widetilde{P} : x \mapsto P(x)$.

a) Montrer que Ψ est un morphisme d'algèbres unitaires.

b) Montrer que Ψ est injective si A est un anneau intègre infini.

c) Montrer que Ψ n'est pas injective si A est un corps fini.

d) En utilisant l'algèbre de Boole $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ des parties d'un ensemble infini E, montrer que si A est infini sans être intègre, il n'y a aucune raison pour que Ψ soit injective.

Question 255 *[1] Soit n un entier naturel. Soient b_0, ..., b_n des réels distincts deux à deux, et c_0, ..., c_n une famille de $n+1$ réels quelconques. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P(X)$ à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n, tel que $P(b_i) = c_i$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$. Déterminer ensuite tous les polynômes $f(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient cette condition.*

Exercice 4.1 *[2] Soit n un entier naturel. Soient b_0, ..., b_n des réels distincts deux à deux, et c_0, ..., c_n une famille de $n+1$ réels quelconques. En résolvant un système linéaire, démontrer qu'il existe un un seul polynôme $P(X)$ à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n, tel que $P(b_i) = c_i$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$.*

Question 256 *[1] Rappelez les relations entre coefficients et racines d'un polynôme de degré n. Expliquer comment on démontrerait ces formules (on ne demande pas de tout écrire au tableau, mais de se contenter de donner quelques indications sur la preuve de ces formules).*

Question 257 *[1] Soient p un nombre premier et d un diviseur de $p-1$. Soit a un élément d'ordre d du groupe multiplicatif $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \times)$, s'il existe. On a donc $a^d = 1$. Montrer que l'ensemble des racines du polynôme $X^d - 1$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est $\{1, a, a^2, a^3, ..., a^{d-1}\}$.*

Question 258 *[1] Factoriser le polynôme $X^4 + a$ dans $\mathbb{R}[x]$, où a désigne un réel strictement positif.*

Question 259 *[1] Les fonctions $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ et $g(x) = \ln(x+1)$ sont-elles des fonctions polynomiales ou des restrictions de fonctions polynomiales sur leurs intervalles de définition ?*

Question 260 *[1] Pouvez-vous définir la structure d'algèbre ?*

Question 261 *[1] Pouvez-vous nous donner quelques exemples simples d'ensembles structurés en algèbre ?*

Question 262 *[6] Montrer que le polynôme* $X^n + X - 1$ *ne possède que des racines simples dans* $\mathbb{C}$.

Question 263 *[6] Factorisez* $X^n - 1$ *dans* $\mathbb{C}[X]$. *Puis expliquez comment factoriser* $X^n - 1$ *dans* $\mathbb{R}[X]$ *(on demande évidemment d'écrire* $X^n - 1$ *en produit de facteurs irréductibles).*

Question 264 *[6] Déterminer trois réels* a_1, a_2 *et* a_3 *tels que :*

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 9 \\ a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = -156 \\ a_1 a_2 a_3 = -340. \end{cases}$$

Combien ce système possède-t-il de solutions ?

Chapitre 5

Arithmétique

5.1 Division euclidienne

Question 265 *Pourquoi la division euclidienne par* 0 *est-elle impossible ?*

Question 266 *Existe-t-il une division euclidienne dans* $\mathbb{Q}$ *?*

Question 267 *[9] Calculer à la main le reste de la division euclidienne de* 10^{1000} *par* 17*.*

Question 268 *[9] Ecrire* 468 *en base* 16*.*

Question 269 *[9] A quoi sert l'écriture hexadécimale d'un nombre ? Pourquoi et où est-elle utilisée ?*

Question 270 *[9] Voici un nombre donné en binaire :* 10111001101*. Convertissez-le en hexadécimal.*

5.2 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Question 271 *[1] Déterminer le reste de la division de* $n^2 - 3n$ *par* 5*. En déduire les valeurs de* n *pour lesquelles ce reste vaut* 4*.*

Question 272 *[1] Déterminer tous les entiers naturels* n *tels que* $n+3$ *divise* $5n+8$*.*

Question 273 *[1] Déterminer les entiers naturels* a *et* b *tels que* $a^2-9b^2 = 45$*.*

Question 274 *[1] La propriété « un nombre qui divise un produit divise forcément l'un des facteurs » est-elle vraie ou fausse ? Justifiez.*

Question 275 *[1] La relation « divise » est-elle une relation d'ordre dans* $\mathbb{N}$ *? Est-ce une relation d'ordre dans* $\mathbb{Z}$ *?*

Question 276 *[1] On sait que la relation « divise » est une relation d'ordre dans* $\mathbb{N}$*. Est-ce une relation d'ordre total ? Quel lien peut-on trouver entre la relation d'ordre usuelle* $\leq$ *et la relation « divise » dans* $\mathbb{N}$ *?*

Question 277 *[1] Décomposez à la main* 720 *en produit de facteurs premiers. Combien* 720 *possède-t-il de diviseurs ?*

Question 278 *[1] Rappelez le critère de divisibilité par* 9*. Mérite-t-il le nom de critère ? Comment démontrer sa validité ? Démontrez-le. Connaissez-vous la « preuve par* 9 *» d'une multiplication ? Une « preuve par* 9 *» qui réussit signifie-t-elle que la multiplication est juste ?*

Les six questions enchaînées suivantes, placées dans le volume VIII d'*Acquisition des fondamentaux* [8], permettent de revisiter la définition et les propriétés élémentaires des pgcd de deux entiers relatifs en nous plaçant dans le cadre d'une classe de terminale S, spécialité mathématiques, donc en évitant soigneusement toute référence aux anneaux principaux. Un tel développement sera utile pour construire son exposé d'oral 1 du CAPES.

Ces questions peuvent aussi être utilisées par le jury pendant l'entretien qui suit la leçon sur le PGCD, soit parce que certaines propriétés classiques n'ont pas été rappelées dans l'exposé, soit pour vérifier que le candidat sait y répondre. Ces questions sont à travailler en priorité.

Question 279 *[8]* ***(Introduction du PGCD, niveau terminale)***

Si $n \in \mathbb{N}$ *on note* $\mathcal{D}_n$ *l'ensemble des diviseurs de* n *dans* $\mathbb{N}$*.*

1) On suppose que a *et* b *sont deux entiers naturels.*

a) Montrer qu'il existe un unique entier naturel δ *tel que* $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b = \mathcal{D}_\delta$*. On dit alors que* δ *est le plus grand commun diviseur de* a *et* b*, et on note* $\delta = \operatorname{pgcd}(a,b)$*.*

b) Ecrire un algorithme permettant de calculer δ*.*

2) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$*. On pose* $\delta = \operatorname{pgcd}(a,b)$*.*

a) Montrer que δ *est le plus grand élément de* $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$ *pour la relation d'ordre « divise » dans* $\mathbb{N}$*.*

b) Si $(a,b) \neq (0,0)$*, montrer que* δ *est le plus grand élément de* $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$ *pour la relation d'ordre* $\leq$ *dans* $\mathbb{N}$*. Ce résultat reste-t-il vrai si* $(a,b) = (0,0)$ *?*

3) Proposer une définition de $\operatorname{pgcd}(a,b)$ *lorsque* $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$*.*

Question 280 *[8]* ***(Propriétés du PGCD, niveau terminale)*** *On se place dans le contexte d'une classe de terminale. Pour tous* $a, b, c, k \in \mathbb{Z}$*, démontrer que :*

a) $\text{pgcd}(a, 0) = a$ *et* $\text{pgcd}(a, 1) = 1$*,*

b) $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a)$ *(commutativité),*

c) $\text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c) = \text{pgcd}(a, \text{pgcd}(b, c))$ *(associativité).*

Question 281 *[8]* ***(Propriétés du PGCD, niveau terminale)***
On se place dans le contexte d'une classe de terminale.

a) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$*. Montrer l'implication :*

$$\text{pgcd}(a, b) = \delta \;\Rightarrow\; \exists u, v \in \mathbb{Z} \quad au + bv = \delta.$$

b) L'implication réciproque est-elle vraie ?

c) Enoncez et démontrez le Théorème de Bezout.

Question 282 *[8]* ***(Propriétés du PGCD, niveau terminale)***
On se place dans le contexte d'une classe de terminale. Pour tous $a, b, k \in \mathbb{Z}$*, démontrer que* $\text{pgcd}(ka, kb) = |k| \, \text{pgcd}(a, b)$*.*

Question 283 *[8]* ***(Propriétés du PGCD, niveau terminale)***
On se place dans le contexte d'une classe de terminale. On considère trois entiers relatifs a, b et c. Soient a, b deux entiers naturels non simultanément nuls, et $\delta = \text{pgcd}(a, b)$*. Montrer qu'il existe deux entiers* a' *et* b' *tels que* $a = \delta a'$*,* $b = \delta b'$ *et* $\text{pgcd}(a', b') = 1$*.*

Question 284 *[8]* ***(Propriétés du PGCD, niveau terminale)***
On se place dans le contexte d'une classe de terminale. On considère trois entiers relatifs a, b et c. Montrer que :

a) Si a est premier avec b et premier avec c, alors a est premier avec bc.

b) Si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

c) Si a et b sont premiers entre eux et divisent c, alors ab divise c.

Question 285 *[1] Expliquez comment définir le pgcd de deux nombres entiers naturels en utilisant l'algorithme d'Euclide. Justifiez complètement votre définition et, en particulier, expliquez pourquoi l'algorithme d'Euclide aboutit après un nombre fini de calculs.*

Question 286 *[1] Connaissez-vous une interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide qui permet de calculer le pgcd de deux nombres entiers ?*

Question 287 *[1] A quoi servent les pgcd et les ppcm ?*

Question 288 *[1] Peut-on calculer un pgcd ou un ppcm sans utiliser l'algorithme d'Euclide ?*

Question 289 *[1] Y-a-t-il un ordre logique dans l'introduction des notions suivantes :*
a) le pgcd et le ppcm de deux entiers ;
b) la décomposition de tout entier non nul en produit de facteurs premiers ? Autrement dit, vaut-il mieux présenter l'étude du pgcd « avant » la décomposition en produit de facteurs premiers, ou le contraire ?

Question 290 *[1] Comment calculer un ppcm en utilisant l'algorithme d'Euclide ?*

Question 291 *[1] Déterminer les couples d'entiers relatifs dont le pgcd est* 15 *et la différence* 105.

Question 292 *[1] Soient* a, b, $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$ *entraîne* $\operatorname{pgcd}(a,b^n) = 1$. *La réciproque est-elle vraie ?*

Question 293 *[1] Montrer que* $a \equiv b \ (c)$ *entraîne* $\operatorname{pgcd}(a,c) = \operatorname{pgcd}(b,c)$).

Question 294 *[1] Calculer* $\operatorname{pgcd}(350, 392, 1925)$ *et* $\operatorname{ppcm}(350, 392, 1925)$.

Question 295 *[1] Un conteneur a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions* 500 *cm,* 350 *cm et* 200 *cm. On désire le remplir de boîtes cubiques sans laisser aucun espace vide. Quelles pourront être les dimensions de ces boîtes.*

Question 296 *[1]Soit* $P(X) = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$ *un polynôme de degré* n *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$. *Montrer que si* $r = p/q$ *est une racine rationnelle de* P *avec* $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *et* $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$, *alors* p *divise* a_0 *et* q *divise* a_n. *Quelles sont les seules racines rationnelles possibles de :*

$$P(X) = 2X^{1104} + 32X^{54} + 2X - 1 \quad ?$$

Question 297 *[1] On suppose que les entiers* u *et* v *sont premiers entre eux et de parités différentes. Démontrer que les entiers* $2uv$, $u^2 + v^2$, $u^2 - v^2$ *sont premiers entre eux deux à deux.*

Question 298 *[1] A-t-on le droit d'écrire* $\operatorname{pgcd}(a,b,c)$ *? Justifiez.*

Question 299 *[7] (Ecrit du CRPE 2013) Soient* n *un nombre entier naturel non nul et* A_n *le nombre entier naturel dont l'écriture décimale ne contient que le chiffre* 1 *répété* n *fois :* $A_n = \overline{111...1}$ *(*1 *répété* n *fois).*
a) Pour quelles valeurs de n *le nombre* A_n *est-il divisible par* 11 *? Justifier.*
b) Pour quelles valeurs de n *le nombre* A_n *est-il divisible par* 33 *? Justifier.*

5.3 Nombres premiers

Question 300 *[1] Montrer sans utiliser de calculatrice que* 223 *est un nombre premier.*

Question 301 *[1] Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à* 2 *possède au moins un diviseur premier.*

Question 302 *[1] Démontrer qu'un nombre premier est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas. La réciproque est-elle vraie ?*

Question 303 *[1] Si p est un nombre premier, montrer que l'implication suivante est vraie : ($p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$). La réciproque est-elle vraie ?*

Question 304 *[9] (Ecrit du CAPESA 2015) Soit $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que k^2 divise n^2 si et seulement si k divise n. On pourra faire appel à la décomposition d'un entier en facteurs premiers.*

Question 305 *[1] Enoncez et démontrez le théorème de décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers.*

Question 306 *[1] Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.*

Question 307 *[1] Si un entier est divisible par* 4*, alors il est divisible par* 8 *? Justifiez votre réponse.*

Question 308 *[1] Si un entier est divisible par* 4 *et* 5*, alors il est divisible par* 20 *? Justifiez votre réponse.*

Question 309 *[1] Si un entier est divisible par* 4 *et* 6*, alors il est divisible par* 24 *? Justifiez votre réponse.*

Question 310 *[1](Oral du CAPES externe 2009) Si a et b sont des entiers premiers entre eux, alors $\mathrm{pgcd}(a+b, a-b) = 1$ ou 2 ? Justifiez votre réponse.*

Question 311 *[1] Si a et b sont des entiers premiers entre eux, alors a^2 et b^2 sont premiers entre eux ? Justifiez votre réponse.*

Question 312 *[1] Soient n et a deux entiers naturels ≥ 2. On suppose que $a^n - 1$ est premier. Montrer que $a = 2$ et que n est premier.*

Question 313 *[1] Montrer que la formule $ab = \mathrm{pgcd}\,(a,b)\,\mathrm{ppcm}\,(a,b)$ est vraie quels que soient les entiers naturels a et b.*

Question 314 *[1] $a = up_1^{\alpha_1}...p_m^{\alpha_m}$ et $b = vp_1^{\beta_1}...p_m^{\beta_m}$ représentent les décompositions de deux entiers naturel non nuls a et b en produits de facteurs premiers. On demande de démontrer que a divise b si et seulement si $\alpha_i \leq \beta_i$ quel que soit i appartenant à $\{1, ..., m\}$.*

Question 315 *[1] Soient p un nombre premier et k un entier tel que $0 < k < p$. Montrer que, dans ces conditions, p divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$. Cette divisibilité reste-t-elle acquise si p n'est plus un nombre premier ?*

Question 316 *[1] Calculer le nombre de tous les diviseurs d'un entier en fonction des nombres premiers et des exposants qui interviennent dans la décomposition de cet entier.*

Question 317 *[1] Calculer la somme de tous les diviseurs d'un entier en fonction des nombres premiers et des exposants qui interviennent dans la décomposition de cet entier.*

Question 318 *[1] Combien le nombre 825 possède-t-il de diviseurs ?*

Question 319 *[1] Cherchez tous les diviseurs de 24 à la main.*

Question 320 *[1] Combien 560 possède-t-il de diviseurs dans $\mathbb{N}$? Et combien possède-t-il de diviseurs impairs ? La classe de 560 est-elle inversible dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$?*

Question 321 *[1](Oral du CAPES externe 2006) Soit p un nombre premier supérieur à 5. Est-ce que p divise $\sum_{k=0}^{p} (p+k)^2$?*

Question 322 *[1] Peut-on dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^2 + n + 41$ est un nombre premier ?*

Question 323 *[1] Dans un anneau principal, on note $a \wedge b$ et $a \vee b$ les pgcd et ppcm de a et b. Montrer les formules de distributivité :*

$$\begin{aligned} (1) \quad a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c), \\ (2) \quad a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \end{aligned}$$

Question 324 *[1] On se propose de déterminer les solution entières non triviales (c'est-à-dire telles que $xyz \neq 0$) de l'équation de Pythagore (E) : $x^2 + y^2 = z^2$.*

a) Montrer que l'on peut ramener la recherche des solutions de (E) à celle des solutions telles que $\operatorname{pgcd}(x, y, z) = 1$.

b) Dans cette question x, y, z sont des solutions entières de (E) telles que $xyz \neq 0$ et $\operatorname{pgcd}(x, y, z) = 1$. Montrer que x et y sont de parité différente. En supposant x pair et y impair, déterminer toutes les solutions de (E) dans ce cas particulier.

c) Conclure dans le cas général.

5.4 Congruences, anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Question 325 *[1] Définissez la relation de congruence entre deux entiers relatifs. Que pouvez-vous dire sur cette relation ? Donnez deux définitions possibles de l'écriture $x \equiv y \ \ (n)$, et démontrez l'équivalence de ces définitions.*

Question 326 *[1] En terminale, on introduit la notion « avoir le même reste » dans une division euclidienne. Pouvez-vous donner une CNS pour que deux entiers a et b aient le même reste dans la division par n ? Démontrez-là.*

Question 327 *[1] Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{Z}$ sont compatibles avec la relation de congruence modulo n.*

Question 328 *[1] Montrer que l'on peut définir, de façon canonique, des lois $+$ et $\times$ dans l'ensemble-quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Question 329 *[1] Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Soit $\dot{x}$ un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Donner une CNS pour que $\dot{x}$ soit inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Question 330 *[1] Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Quels sont les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$?*

Question 331 *[1] Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Soit $\dot{x}$ un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) $\dot{x}$ *est inversible,*
ii) $\mathrm{pgcd}\,(x,n) = 1$,
iii) $\dot{x}$ *est un générateur de* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.

Question 332 *[1] Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) n est premier,
ii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps,
iii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre.

Question 333 *{[1] Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.*

Question 334 *[1] L'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est-il intègre ? Et $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$? Prouvez ce que vous affirmez.*

Question 335 *[1] Enoncez le théorème des restes chinois. Démontrez-le.*

Question 336 *[1] On suppose que p et q sont deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ soit isomorphe à $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. Démontrer que p et q sont premiers entre eux.*

Question 337 *[1] Définissez la fonction indicatrice d'Euler φ. Si $n \in \mathbb{N}^*$, donnez une expression explicite de $\varphi(n)$ en fonction des nombres premiers et des exposants qui interviennent dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers. Démontrez cette formule.*

Question 338 *[1] Calculez $\varphi(8)$. Que peut-on en déduire sur $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$?*

Question 339 *[1] Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On note φ la fonction indicatrice d'Euler. Démontrer que $\dot{a}^{\varphi(n)} = \dot{1}$ quel que soit l'élément $\dot{a}$ inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Question 340 *[1] Si p est premier, démontrez que $a^p \equiv a \ (p)$ pour tout entier relatif a (petit Théorème de Fermat). Pouvez-vous en déduire une expression simple de l'inverse d'un élément inversible $\dot{a}$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?*

Question 341 *[1] Montrer que $n^2\left(n^4-1\right)$ est divisible par 5 quel que soit l'entier naturel n.*

Question 342 *[1] Soit p un nombre premier. Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) $a^p \equiv a \ (p)$ quel que soit l'entier a,
(2) $a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$ quel que soit l'entier a tel que p ne divise pas a.

Question 343 *[1] Soit n un entier dont la décomposition s'écrit $n = p_1...p_m$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et où les p_i sont des nombres premiers distincts entre eux deux à deux. On suppose que $p_i - 1$ divise $n-1$ quel que soit i appartenant à $\{1, ..., m\}$. Montrer que :*

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a^n \equiv a \ (n) .$$

Décomposer le nombre 561. Que peut-on conclure ?

Question 344 *[1] Soit p est un nombre premier supérieur à 3. Soit x un entier qui n'est pas un multiple de p. Pouvez-vous nous donner une expression simple de l'inverse de la classe $\dot{x}$ de x dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?*

Question 345 *[1] Soit p un entier naturel supérieur ou égal à ≥ 2. Montrer que p premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1 \ (p)$ (Théorème de Wilson).*

Question 346 *[1] Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que 10^k est congru à 1 modulo 7 si et seulement si k est multiple de 6.*

Question 347 *[1] Calculer l'ordre additif de la classe de 12 dans $\mathbb{Z}/280\mathbb{Z}$.*

Question 348 *[1] Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la fonction indicatrice d'Euler. On rappelle que $\varphi(1) = 1$, et que si n est un entier naturel ≥ 2, $\varphi(n)$ désigne le nombre de générateurs du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n. Si $d \in \mathcal{D}(n)$, on note C_d l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d.*

a) Montrer que $\{C_d \,/\, d \in \mathcal{D}(n)\}$ est une partition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. (NB : on pourra utiliser des résultats du cours concernant les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sans avoir à les redémontrer, mais on devra les énoncer très précisément.)

b) En déduire que $n = \sum_{d\in\mathcal{D}(n)} \varphi(d)$.

Question 349 *[1] On suppose que $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est une fonction arithmétique telle que $f(1) = 1$ et telle que l'on ait $n = \sum_{d|n} f(d)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f = \varphi$ où φ représente la fonction indicatrice d'Euler. (NB : on s'autorise ici à utiliser toutes les propriétés classiques du cours concernant φ sans avoir à les redémontrer.)*

Question 350 *[1] Pour tout entier n, le nombre $n(n+1)(2n+1)$ est-il divisible par 3 ? Justifiez.*

Question 351 *[1] Enoncez les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5 et 11. Démontrez le critère de divisibilité par 4, puis par 11.*

Question 352 *[1] Connaissez-vous un critère de divisibilité par 7 ?*

Question 353 *[1] Que veut-on dire en parlant de la "preuve par neuf de la multiplication" ? S'agit-il réellement d'une preuve ? Justifiez-là.*

Question 354 *[1] Résoudre le système de congruences :*

$$\begin{cases} x \equiv 14 \ (17) \\ x \equiv \ 3 \ \ (15). \end{cases}$$

Déterminer ensuite la plus petite solution positive de ce système.

Question 355 *[1] Résoudre le système de congruences :*

$$\begin{cases} 7x \equiv 5 \ (19) \\ 4x \equiv 1 \ (11). \end{cases}$$

Question 356 *[1] Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Soient u et v deux entiers tels que $up + vq = 1$. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que le système de congruences :*

$$(S) \quad \begin{cases} x \equiv a \ (p) \\ x \equiv b \ (q) \end{cases}$$

admet la solution particulière $x_0 = bup + avq$. Montrer que l'ensemble des solutions de (S) est formé des entiers de la forme $x_0 + kpq$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Question 357 *[1] Soit (a,b,c) un triplet de $\mathbb{Z}^3$. Donner une méthode de résolution de l'équation diophantienne $ax+by=c$ (Dans quels cas existe-t-il des solutions entières x, y à cette équation ? Comment les obtenir toutes ?...)*

Question 358 *[1] Résoudre l'équation $233x+79y=1$ en nombres entiers.*

Question 359 *[1] Trouver les sous-groupes de $6\mathbb{Z}$ qui contiennent $2\mathbb{Z}$. Trouver les sous-groupes de $2\mathbb{Z}$ qui contiennent $6\mathbb{Z}$.*

Question 360 *[1] Résoudre l'équation $21x+14y=17$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.*

Question 361 *Résoudre l'équation $7x+5y=2$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.*

Question 362 *[1] Soit n un entier >1. Soit $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$. Montrer que $(\mathcal{I}_n,\times)$ est un groupe commutatif.*

Question 363 *[1] On note $\mathcal{I}_{10}$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de $\mathcal{I}_{10}$ avec leurs ordres. Le groupe $(\mathcal{I}_{10},\times)$ est-il cyclique ?*

Question 364 *[1] On note $\mathcal{I}_{12}$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Sans justification, énumérer, dans un tableau ayant deux rangées, les éléments de $\mathcal{I}_{12}$ avec leurs ordres. Le groupe $(\mathcal{I}_{12},\times)$ est-il cyclique ?*

Question 365 *[1] (Ecrit du BAC 1983, série C) Soit E l'ensemble des entiers relatifs x vérifiant $x^2\equiv 2\ (7)$ et F l'ensemble des entiers relatifs x vérifiant $x^2\equiv 2\ (49)$.*

a) Déterminer l'ensemble E, puis montrer que F est inclus dans E.
b) Trouver tous les entiers relatifs k tels que $3+7k$ appartiennent à F.
c) Déterminer F.

5.5 Corps des rationnels

Question 366 *[1] Pouvez-vous indiquer les grandes lignes de la construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels ?*

Question 367 *[1] Pouvez-vous nous expliquer la propriété universelle vérifiée par le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ? Enoncez et démontrez cette propriété fondamentale. Montrez ensuite que cette propriété universelle caractérise le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.*

Question 368 *[1] Comment définir la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{Q}$? Vérifier que la relation d'ordre ainsi définie généralise la relation d'ordre usuelle de $\mathbb{Z}$.*

Question 369 *[1] Que veut-on dire quand on énonce que la relation $\leq$ sur $\mathbb{Q}$ est compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}$? Démontrez l'une de ces compatibilités.*

Question 370 *[1] Comment démontrer que le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas complet ? Indication : on pourra utiliser les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \quad et \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

Question 371 *[1] Montrer que la partie $E = \{x \in \mathbb{Q}_+ \,/\, x^2 \leq 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.*

Question 372 *[1] Est-il toujours possible de paver un rectangle avec des carrés identiques ? Dans la négative, proposez une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi.*

Question 373 *[1] Soit n un entier relatif. Montrer que les deux quotients $n(n+1)/2$ et $n(n+1)(2n+1)/6$ sont des entiers.*

Question 374 *[1] Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

Question 375 *[1] Soient m et n deux entiers naturels. Montrer que $\sqrt[n]{m}$ est irrationnel si et seulement si m n'est pas la puissance n-ième d'un entier.*

Question 376 *[1] Si x est un nombre réel irrationnel, peut-on affirmer que pour tout nombre entier naturel non nul n le réel x^n est irrationnel ? Justifier.*

Question 377 *[1] Montrer que si b est un entier naturel, $\sqrt{b}$ est rationnel si et seulement si b est un carré parfait.*

Question 378 *[1] Montrer que tout nombre rationnel r s'écrit de façon unique sous la forme $r = a/b$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$. Dans ce cas, démontrer la CNS suivante : $r = c/d$ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{Z}$ tel que $(c,d) = (ta, tb)$.*

Question 379 *[1] Démontrer que la somme de deux fractions irréductibles dont les dénominateurs sont premiers entre eux ne peut pas être un entier, sauf dans un cas particulier que l'on précisera.*

Question 380 *[1] Montrer qu'un rationnel a/b ($a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$) écrit sous la forme d'une fraction irréductible est un décimal si et seulement si la décomposition en facteurs premiers de b est de la forme $2^\alpha 5^\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$.*

Question 381 *[1] Décrire et justifier un algorithme permettant de montrer que tout nombre rationnel peut être arbitrairement approché par un nombre décimal.*

Question 382 *[1] Soient a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$. Comment utiliser la division euclidienne pour obtenir le développement décimal du nombre rationnel a/b ?*

Question 383 *[1] En utilisant des divisions euclidiennes, démontrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux est dense dans $\mathbb{Q}$.*

Question 384 *[1] Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est-il infini ? Est-il dénombrable ?*

Question 385 *[1] Soit x un nombre réel positif. Montrer qu'il existe une et une seule suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

Montrer que $0 \leq a_n \leq 9$ pour tout $n > 0$. Que peut-on dire de plus ?

Question 386 *[1] Tout nombre réel positif x possède une écriture décimale illimitée $a_0, a_1...a_n...$ où $a_0 \in \mathbb{N}$ et $a_n \in \{0, ..., 9\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la suite décimale $a_0, a_1...a_n...$ est* périodique *s'il existe $N \geq 1$ et $m \geq 1$ tels que $a_{n+m} = a_n$ pour tout $n \geq N$. Soit x un nombre réel positif. Montrer que x est rationnel si et seulement si son écriture décimale illimitée est périodique.*

Question 387 *[7] Calculer $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$. Les implications suivantes sont-elles vraie :*

(1) $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha^\beta \notin \mathbb{Q}$,

(2) $\alpha, \beta, \gamma \notin \mathbb{Q} \Rightarrow (\alpha^\beta)^\gamma \notin \mathbb{Q}$?

Chapitre 6

Algèbre linéaire

6.1 Généralités

Question 388 *[2] Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide d'un espace vectoriel E. Comment définissez-vous le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{A}$? Montrez que ce sous-espace est formé de toutes les combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{A}$.*

Question 389 *[2] Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E. Quand dit-on que F et G sont supplémentaires dans E ? Proposez deux définitions, puis montrez qu'elles sont équivalentes.*

Question 390 *[2] On considère m sous-espaces vectoriels F_1, ..., F_m d'un espace vectoriel E. Quand dit-on que ces sous-espaces sont supplémentaires dans E ? Proposez deux définitions, puis montrez qu'elles sont équivalentes.*

Question 391 *[2] Peut-on dire que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'un espace vectoriel sont colinéaires si, et seulement si, il existe un scalaire λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$? Expliquez.*

Question 392 *[2] Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que toute famille de vecteurs de cardinal $n+1$ dont chacun des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire de n vecteurs donnés, est liée.*

Question 393 *[2] Quand dit-on qu'un espace vectoriel est de dimension finie ? Montrer que, dans un espace vectoriel de dimension finie,*

a) toute famille génératrice admet une sous-famille génératrice finie,

b) toute famille libre est finie et de cardinal inférieur à celui d'une famille génératrice finie quelconque de E.

Question 394 *[2] Enoncez le Théorème de la base incomplète. Avez-vous une idée sur la façon dont on le démontre ? (On ne demande pas de démonstration complète, mais une piste pour démontrer ce résultat.)*

Question 395 *[2] Démontrer le Théorème de la dimension suivant lequel toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal.*

Question 396 *[2] Soit n un entier naturel non nul. Soit $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{F}$ est libre,
ii) $\mathcal{F}$ est génératrice,
iii) $\mathcal{F}$ est une base de E.

Question 397 *[2] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une base de E. Peut-on trouver un vecteur non nul v de l'espace E tel que la famille $(u_1, u_2, ..., u_n, v)$ soit encore une base de E ? Justifier.*

Question 398 *[2] Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel sur un corps commutatif K. Soit Λ une partie non vide de $\overrightarrow{E}$. Soient $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{E}$. On note* $\mathrm{Vect}\,(\Lambda)$ *le sous-espace vectoriel engendré par Λ. Expliciter les ensembles suivants :* $\mathrm{Vect}\,(\Lambda)$, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{F} \cup \overrightarrow{G})$ *et* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G})$.

6.2 Applications linéaires

Question 399 *[2] Qu'est-ce qu'une projection vectorielle ? Enoncez cinq propriétés concernant des projections vectorielles.*

Question 400 *[2] Qu'est-ce qu'une symétrie vectorielle ? Enoncez cinq propriétés concernant des symétries vectorielles.*

Question 401 *[2] Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Montrer l'équivalence :*

$$y = p(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y \in F \\ y - x \in G. \end{cases}$$

Question 402 *[2] Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E. Soit s la symétrie par rapport à F, parallèlement à G. Montrer l'équivalence :*

$$y = s(x) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x + y \in F \\ x - y \in G. \end{cases}$$

Question 403 *[2] Soit E un espace vectoriel. Montrer qu'un endomorphisme p est une projection si et seulement si $p^2 = p$.*

Question 404 *[2] Soit E un espace vectoriel sur un corps K de caractéristique différente de 2. Montrer qu'un endomorphisme s est une symétrie si, et seulement si, il est involutif.*

Question 405 *[2] Soient n un entier naturel non nul, et φ un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{R}\varphi(a) = \varphi(\mathbb{R}a)$.*

Question 406 *[2] Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels sur K. On suppose que E' est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E, soit $E = \operatorname{Ker} f \oplus E'$. Montrer que l'application :*

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{f}: & E' & \to & f(E) \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de E' sur $f(E)$.

Question 407 *[2] Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer les équivalences suivantes :*

(1) f *surjective* $\Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{L}(F, E) \quad f \circ g = Id_F$.

(2) f *injective* $\Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{L}(F, E) \quad g \circ f = Id_E$.

Question 408 *[2] Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, c'est-à-dire tels que $E = F \oplus G$. Montrer que $E/F \simeq G$.*

Question 409 *[2] Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim(E/F) = \dim E - \dim F$.*

Question 410 *[2] Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F sur le même corps K. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme $\widetilde{u} : E/\operatorname{Ker} u \to \operatorname{Im} u$ qui rende le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \downarrow \pi & & \uparrow i \\ E/\operatorname{Ker} u & \xrightarrow{\widetilde{u}} & \operatorname{Im} u \end{array}$$

Dans ce diagramme, π désigne la surjection canonique qui à $x \in E$ fait correspondre la classe $\overline{x}$ de x dans $E/\operatorname{Ker} u$, et i représente l'injection canonique de $\operatorname{Im} u$ dans F qui à $y \in \operatorname{Im} u$ fait correspondre y.

Question 411 *[2] Démontrer le Théorème du rang : si* $u : E \to F$ *est une application linéaire entre deux espaces vectoriels* E *et* F*, et si* E *est de dimension finie, alors* $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} u$.

Question 412 *[2] Si* F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels d'une espace vectoriel* E *de dimension finie, montrer que :*

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Question 413 *[2] Soit* $f : E \to E$ *un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie* E*. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) f *est surjective,*
ii) f *est injective,*
iii) f *est bijective.*

Question 414 *[2] Montrer qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *laisse stable toutes les droites vectorielles si et seulement si c'est une homothétie.*

Question 415 *[2] Soit* E *un espace vectoriel. Montrer qu'un endomorphisme de* E *commute avec tous les endomorphismes de* E *si et seulement si c'est une homothétie. Quel est le centre du groupe linéaire* $\mathrm{GL}(E)$ *?*

Question 416 *[2] Soit* φ *un endomorphisme du plan euclidien* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes. Montrer qu'il existe un et un seul couple* (u, v) *de nombres complexes tel que* $\varphi(z) = uz + v\overline{z}$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

Question 417 *[2] Soit* u *un endomorphisme de rang* 1 *d'un espace vectoriel* E*. Démontrer qu'il existe un vecteur* y *de* E *et une forme linéaire* $l \in E^*$ *tels que* $u(x) = l(x)\,y$ *pour tout* $x \in E$.

Question 418 *[2] Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif* K*. Soit* u *un endomorphisme non nul de* E*. Montrer qu'il est toujours possible d'écrire* u *comme une combinaison linéaire d'endomorphismes de* E *de rang* 1.

6.3 Hyperplans

Question 419 *[2] Soit* E *un espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie). Soit* H *un sous-espace vectoriel de* E*. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

(ii) Il existe une droite D telle que $E = H \oplus D$.

Comment appelle-t-on H dans ce cas ? Si E est de dimension finie, quelle est la dimension de H ?

Question 420 *[2] Soit E un espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie). Soit H un sous-espace vectoriel de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

(ii) $\dim E/H = 1$.

Question 421 *[2] Soit E un espace vectoriel sur le corps commutatif K, non nécessairement de dimension finie. Si H est un hyperplan de E, montrer que pour tout vecteur a n'appartenant pas à H, on a $E = H \oplus Ka$.*

Question 422 *[2] On considère un espace vectoriel E. Montrer que deux formes linéaires sur E définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles. On proposera une solution lorsque E est de dimension quelconque, éventuellement infinie, et une autre solution quand* $\dim E = 3$.

Question 423 *[2] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 rapporté à une certaine base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère les formes linéaires l et l' définies par $l(x, y, z) = ax + by + cz$ et $l'(x, y, z) = a'x + b'y + c'z$. Montrer que l et l' sont proportionnelles si et seulement si les suites (a, b, c) et (a', b', c') le sont.*

Question 424 *[2] Soit E un espace vectoriel. Montrer qu'un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan si et seulement si c'est un sous-espace vectoriel maximal dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E distincts de E.*

En déduire qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé est fermé ou partout dense.

6.4 Dualité

Question 425 *[2] Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension finie n.*

a) Que peut-on dire de l'orthogonal de H pour la dualité ?

b) Si P et Q sont des hyperplans de E définis comme les noyaux de formes linéaires f et g, en déduire l'équivalence :

$$P = Q \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ et } g \text{ sont proportionnelles.}$$

Question 426 *[2] Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère m hyperplans H_1, ..., H_m définis comme les noyaux des formes linéaires non nulles l_1, ..., l_m.*

a) Quelle est la dimension de l'intersection $H_1 \cap ... \cap H_m$?

b) Avez-vous une idée de la façon dont on peut démontrer cette formule ?

Question 427 *[2] On considère $m+1$ hyperplans H_1,..., H_m, H d'un espace vectoriel E de dimension n (sur un corps commutatif K), définis par des formes linéaires respectives l_1, ..., l_m, l. Montrer que :*

$$H_1 \cap ... \cap H_m \subset H \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda_i \in K \quad l = \lambda_1 l_1 + ... + \lambda_m l_m.$$

6.5 Matrices

Question 428 *[2] Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soient A et B deux matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels. Peut-on affirmer que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? Justifiez votre réponse complètement.*

Question 429 *[2] Quelle forme agréable prend la matrice d'une projection vectorielle lorsqu'on se place dans une base « adaptée » ? Même question avec une symétrie, une affinité, une transvection, une homothétie.*

Question 430 *[2] Ecrire les « formules de changement de bases » dans un espace vectoriel de dimension finie n. Rappeler la formule de changement de bases pour une matrice d'application linéaire, puis pour une matrice de forme bilinéaire symétrique.*

Question 431 *[2]* ***Rang d'une matrice et de sa transposée.***
Soit M une matrice p-lignes, n-colonnes à coefficients réels. On suppose que M est de rang r. Montrer que M est équivalente à la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{p-r,r} & O_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$$

où I_r désigne la matrice unité de taille r et où $O_{s,t}$ désigne la matrice nulle de taille $s \times t$. En déduire la formule $\mathrm{rg}\ {}^tM = \mathrm{rg}\ M$.

Question 432 *[2] Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$. On suppose que A est strictement triangulaire supérieure, autrement dit que $a_{ij} = 0$ dès que $i \geq j$. Démontrer que A est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n.*

Question 433 *[2] Soit G l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures de taille n ($n \geq 1$), à coefficients dans un corps commutatif K, et dont les termes situés sur la diagonale principale sont tous égaux à 1.*

a) Montrer que G est un groupe multiplicatif.

b) Déterminer le centre $Z(G)$ du groupe G, c'est-à-dire le sous-groupe de G formé par les matrices de G qui commutent avec tous les éléments de G.

6.6 Déterminants

Question 434 *[2] Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Donner une définition du déterminant de n vecteurs de E dans une base de E.*

Question 435 *[2] Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Soit Λ l'espace vectoriel des formes 3-linéaires alternées sur l'espace E. Montrer que* $\dim \Lambda = 1$. *Rappeler la définition du déterminant d'un triplet de vecteurs de E dans une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de E.*

Question 436 *[2] Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K ($n \geq 1$). Soit u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un unique nombre $\lambda_u \in K$ tel que pour toute base $e = (e_1, ..., e_n)$ de E et tout $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ on ait $\det_e(u(x_1), ..., u(x_n)) = \lambda_u \det_e(x_1, ..., x_n)$. Comment s'appelle λ_u ? Donner une expression de λ_u en fonction de la matrice de u dans une base e.*

Question 437 *[2] Pouvez-vous énoncer une CNS de colinéarité de deux vecteurs $\overrightarrow{u}\ (x_1, ..., x_n)$ et $\overrightarrow{v}\ (y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ utilisant des déterminants 2×2 ? Proposez une preuve.*

Question 438 *[2] Calculer le déterminant de Vandermonde $\Delta_n(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ associé aux complexes λ_1, ..., λ_n. On rappelle que :*

$$\Delta_n(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Question 439 *[2] Soit $\mathcal{M}_n$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients réels. Pour tout élément $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n$ la* trace $\mathrm{Tr}(A)$ *de A est définie par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ de trace nulle. Prouver que $\mathcal{S}_n$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.*

Question 440 *[2] On rappelle que la trace d'une matrice carrée est égale à la somme de tous ses coefficients situés sur la diagonale principale. Soient deux matrices carrées $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.*

6.7 Systèmes linéaires

Question 441 *[2] Quelle erreur doit-on éviter à tout prix quand on résout un système linéaire ? (resp. un système d'équations ?)*

Question 442 *[2] Quelle est l'intérêt de la méthode de Gauss de résolution d'un système linéaire ?*

Question 443 *[2] (Oral du CAPES interne 2006) Quelle définition d'un système feriez-vous écrire dans le cahier de vos élèves de troisième ?*

Question 444 *[2] (Oral du CAPES interne 2006) Comment répondriez-vous à un élève s'il vous demande combien de solutions possède un système (autre que graphiquement) ?*

Question 445 *[2] (Oral du CAPES interne 2006) Quelle est l'importance de la vérification en troisième ? Est-elle aussi importante qu'à un niveau supérieur et pourquoi ?*

Question 446 *[2] (Oral du CAPES interne 2006) Quelles sont les différentes méthodes de résolution d'un système linéaire de deux équations du premier degré à deux inconnues ?*

Question 447 *[2] Résoudre le système linéaire :*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

dans le cas général où a, b, c, a', b', c' *sont des réels donnés, sans utiliser ses connaissances sur les équations de droites, les déterminants et les systèmes de Cramer. Retrouver ainsi les formules de Cramer.*

Question 448 *[2] Quel type de raisonnement fait-on quand on désire démontrer à un élève du secondaire que le système :*

$$\begin{cases} 5x + 10y = 7 \\ 3x + 6y = 4 \end{cases}$$

n'admet pas de solution ? Expliquer cela très précisément.

Question 449 *[2] (Oral du CAPES interne 2006)*

a) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 5y + z = 12 \\ 2x + 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

b) Au lycée, quand est-on amené à résoudre des systèmes de ce type ?

Question 450 *[2] A l'oral du CAPES interne 2004, un candidat propose l'activité suivante pour une classe de troisième : « Une basse-cour n'abrite que des lapins et des oies, au total* 27 *animaux et* 90 *pattes. Quel est le nombre de lapins et d'oies ? ». On trouve* $x = 18$ *et* $y = 9$.

a) Si un élève dit : « Sachant qu'un lapin a deux fois plus de pattes qu'une oie, je partage le nombre d'animaux en 3 *et je trouve* 18 *lapins et* 9 *oies », que lui répondrez-vous ?*

b) Comment démontrer que l'élève a tort ?

Question 451 *[2] On considère un système linéaire* $AX = B$ *où* $A = (a_{ij})$ *est une matrice carrée inversible de taille* n, $X = {}^t(x_1, ..., x_n)$ *est l'inconnue et où* $B = {}^t(b_1, ..., b_n)$ *est donné. Montrez que ce système admet une unique solution, puis démontrez les formules de Cramer.*

6.8 Réduction d'endomorphismes

Question 452 *[2] Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie* n, *et* u *un endomorphisme de* E. *On définit le polynôme caractéristique de* u *de la façon suivante : "Etant donnée une base* $e = (e_1, ..., e_n)$ *de* E, *si* M *désigne la matrice de* u *dans cette base, le polynôme caractéristique de* u *est, par définition, le polynôme* $\chi_u(X) = \det(M - XI)$*". Cette définition a-t-elle un sens ?*

Question 453 *[2] Montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice carrée* A *de taille* n *est* $\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Tr}(A)\ X^{n-1} + ... + \det A$ *où* $\operatorname{Tr}(A)$ *désigne la trace de* A, *et* $\det A$ *son déterminant.*

Question 454 *[2] Donnez une CNS pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.*

Question 455 *[2] Donnez une CNS pour qu'un endomorphisme soit trigonalisable.*

Question 456 *[2] Donner au moins quatre CNS pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable [Ind. : penser aux bases, à sa matrice, à son polynôme caractéristique et aux dimensions des sous-espaces propres, à des polynôme scindé à racines simples ou au polynôme minimal scindé à racines simples.]*

Question 457 *[2] Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif* K, *et* f *un endomorphisme de* E.

a) Soit $Q \in K[X]$. *On suppose que* $Q = Q_1 ... Q_p$ *où les polynômes* Q_i *sont premiers entre eux deux à deux. Montrer que les sous-espaces* $\operatorname{Ker} Q(f)$ *et* $\operatorname{Ker} Q_i(f)$ *sont stables par* f, *puis que l'on a la somme directe :*

$$\operatorname{Ker} Q(f) = \operatorname{Ker} Q_1(f) \oplus ... \oplus \operatorname{Ker} Q_p(f).$$

b) On suppose que le polynôme caractéristique de f est scindé sur K. Qu'appelle-t-on sous-espace caractéristique (ou sous-espace propre généralisé) de f ? Montrer que E est somme directe de ces sous-espaces caractéristiques.

c) Montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable sur K si, et seulement si, il annule un polynôme scindé sur K dont toutes les racines sont simples.

Question 458 *[2] Enoncez le Théorème de Cayley-Hamilton. Pouvez-vous le démontrer ? [L'examinateur donne des indications]*

Question 459 *[2] a) Montrer que toute matrice triangulaire supérieure dont la diagonale principale est nulle est nilpotente.*

b) En déduire que toute matrice M dont le polynôme caractéristique est scindé s'écrit sous la forme $M = D+V$ où D est diagonalisable et V nilpotente.

Question 460 *[2] Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, et u un endomorphisme de E tel que $u^m = Id$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que u est diagonalisable. Comment sont les valeurs propres de u.*

Question 461 *[2] On considère une matrice de Jordan de taille n :*

$$J = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_k \end{pmatrix}$$

où chaque bloc carré M_i placé sur la diagonale principale de M est une cellule de Jordan. On note D la matrice diagonale obtenue à partir de J en annulant tous les coefficients situés en dehors de la diagonale principale. On définit la matrice triangulaire supérieure $T = J - D$. Montrer que $DT = TD$ et en déduire une expression de J^p lorsque $p \in \mathbb{N}$.

Chapitre 7

Rudiments de topologie

7.1 Généralités

Question 462 *[7] Qu'est-ce qu'une topologie ? Un espace topologique ?*

Question 463 *[7] Comment définissez-vous un ouvert d'un espace topologique ? Un ouvert de $\mathbb{R}^n$?*

Question 464 *[7] Qu'est-ce qu'un fermé d'un espace topologique ?*

Question 465 *[7] Soit A une partie d'un espace topologique E. Rappeler brièvement les définitions de l'intérieur de A, de l'adhérence de A, de la frontière de A et de l'extérieur de A.*

Question 466 *[7] Qu'appelle-t-on valeur d'adhérence d'une suite ?*

Question 467 *[7] Soit A une partie non vide d'un espace topologique E. Montrer que l'adhérence $\overline{A}$ de A est réunion disjointe de l'ensemble des points d'accumulation de A et des points isolés de A, ce qu'on pourra écrire :*

$$\overline{A} = \mathrm{Acc}\,(A) \bigsqcup \mathrm{Isol}\,(A)\,.$$

Question 468 *[7] Démontrer qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si, pour tout $a, b \in I$, avec $a \leq b$, l'intervalle $[a, b]$ est inclus dans I.*

7.2 Espaces métriques

Question 469 *[3] Dans un espace métrique, montrer que toute intersection de deux boules ouvertes peut toujours s'écrire comme une réunion de boules ouvertes. A quoi sert cette propriété ?*

7.3 Espaces vectoriels normés

Question 470 *[3] On considère deux normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sur un espace vectoriel E. Quand dit-on que ces normes sont équivalentes ? Montrer que deux normes sont équivalentes si et seulement si elles sont topologiquement équivalentes.*

Question 471 *[3] Montrer que les trois normes usuelles $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Question 472 *[3] Donner un exemple de norme sur $\mathbb{R}^n$ autre que l'une des trois normes usuelles $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$.*

Question 473 *[3] Que peut-on dire des normes d'un espace vectoriel de dimension finie ? (On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit.)*

Question 474 *[3] Montrer que toute application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel normé E est continue.*

7.4 Compacité

Question 475 *[7] Quand dit-on qu'un espace topologique est compact ?*

Question 476 *[7] Montrer qu'une partie compacte d'un espace topologique E est toujours fermée.*

Question 477 *[7] Montrer qu'un fermé inclus dans un compact est compact.*

Question 478 *[7] Montrez que l'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Question 479 *[7] Montrer qu'un produit fini de compacts est un compact.*

Question 480 *[7] Proposer deux définitions équivalentes d'un compact d'un espace métrique. On ne demande pas de démonstration.*

Question 481 *[7] Proposer trois définitions équivalentes d'un compact de $\mathbb{R}^n$. On ne demande pas de démonstration.*

7.5 Connexité

Question 482 *[7] a) Quand dit-on qu'un espace topologique E est connexe ? Donner sans démonstration trois définitions équivalentes.*

b) Démontrer qu'un espace topologique E est connexe si et seulement si toute application continue f de E dans l'ensemble discret $\{0,1\}$ est constante. En déduire que l'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Question 483 *[7] Montrer qu'une réunion de connexes d'intersection non vide est un connexe.*

Question 484 *[7] a) Soit F un espace topologique séparé. Soit A une partie de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A. Soient f et g deux applications continues de $\overline{A}$ dans F telles que :*

$$\forall x \in A \quad f(x) = g(x).$$

Montrer que f et g coïncident sur $\overline{A}$ en entier. On donnera une preuve dans le cas général où E est un espace topologique, puis une alternative à cette preuve lorsque E est un espace métrique.

b) Si A désigne une partie connexe d'un espace topologique séparé E, et si B est une partie de E telle que $A \subset B \subset \overline{A}$, montrer que B est connexe. En déduire que l'adhérence d'un connexe est un connexe.

Question 485 *[7] a) Soit E un espace métrique. Quand dit-on que E est connexe par arcs ? Quand dit-on que E est convexe ?*

b) Si $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que tout convexe de $\mathbb{R}^m$ est connexe par arcs.

c) Si $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{R}^m$ est connexe par arcs.

Question 486 *[7]* ***(Théorème de passage des douanes)***
Si A est une partie d'un espace topologique E, d'intérieur $\overset{o}{A}$, d'extérieur $\overset{\bullet}{A}$ et de frontière ∂A, montrer que tout chemin continu de E dont les extrémités appartiennent l'une à l'intérieur de A, l'autre à l'extérieur de A, coupe nécessairement la frontière ∂A en au moins un point.

Chapitre 8

Formes bilinéaires symétriques

8.1 Généralités

Question 487 *[3] Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $\mathcal{L}_2$ (resp. $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{A}_2$) l'espace des formes bilinéaires (resp. bilinéaires symétriques, bilinéaires antisymétriques) sur E. Montrer que $\mathcal{L}_2 = \mathcal{S}_2 \oplus \mathcal{A}_2$.*

Question 488 *[3] Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Déterminez la dimension de l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E.*

Question 489 *[3] Qu'est-ce qu'une forme bilinéaire symétrique positive ? négative ?*

Question 490 *[3] Quand dit-on qu'une forme bilinéaire symétrique est définie ?*

Question 491 *φ est une forme bilinéaire symétrique définie sur un espace vectoriel E de dimension finie. Qu'appelle-t-on le noyau de φ ? Le rang de φ ?*

Question 492 *[3] Quand dit-on qu'une forme bilinéaire symétrique φ est non dégénérée ? [Questions enchaînées possibles : a) proposez au moins deux, trois ou quatre définitions différentes lorsque l'espace vectoriel dans lequel on se place est de dimension finie ; b) démontrez l'équivalence entre ces définitions.]*

Question 493 *[3] Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz vérifiée par n'importe quelle forme bilinéaire symétrique positive sur un espace vectoriel E. Proposez une preuve de cette inégalité.*

Question 494 *[3] Ecrire l'inégalité de Minkowski vérifiée par n'importe quelle forme bilinéaire symétrique positive sur un espace vectoriel E. Démontrez-la.*

Question 495 *[3] Montrer qu'une forme bilinéaire symétrique définie est a fortiori non dégénérée, mais que la réciproque n'est pas vraie.*

Question 496 *[3] On suppose que f est une forme bilinéaire symétrique positive. Démontrer que f est définie si et seulement si elle est non dégénérée.*

Question 497 *[3] Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit φ une forme bilinéaire symétrique. L'orthogonal d'un sous-espace est défini par rapport à φ. Montrer l'inclusion $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ et l'implication : $(F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp})$.*

Question 498 *[3] Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit φ une forme bilinéaire symétrique. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est défini par rapport à la forme bilinéaire φ. Montrer l'égalité $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.*

Question 499 *[3] Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit φ une forme bilinéaire symétrique. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel est défini par rapport à la forme bilinéaire φ. Montrer l'inclusion $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.*

Question 500 *[3] Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Montrer qu'il existe toujours au moins une base orthogonale de E pour φ.*

Question 501 *[3] Soit φ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E. Montrer que $\dim F^{\perp} = n - \dim F$. En déduire les égalités $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$ et $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.*

Question 502 *[3] Soit f la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, par $f(x,y) = 2x_1y_1 - x_2y_3 + 4x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_3y_3$. Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

Question 503 *[3] Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. A la question : « quand dit-on que φ est positive », un candidat répond : « quand $\varphi(x,y) \geq 0$ pour tout x, y appartenant à E ». Cela est-il vrai ? Si vous pensez que cette affirmation est fausse, il faudra dire ce que vous auriez répondu, et démontrer que le candidat n'a pas énoncé une propriété équivalente à la vôtre.*

8.2 Formes quadratiques

Question 504 *[3] Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie.*

a) Qu'appelle-t-on noyau de q ? On notera $\operatorname{Ker} q$ *ce noyau.*

b) Montrer l'inclusion $\operatorname{Ker} q \subset q^{-1}(\{0\})$*, puis démontrer que cette inclusion n'est en général pas une égalité.*

Question 505 *[3] Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la forme quadratique :*

$$q(x) = 3x_1^2 - 4x_2^2$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$. Déterminer $q^{-1}(\{0\})$ et le noyau de q. Représenter ces ensembles sur un dessin perspectif.

Question 506 *[3] Soit q la forme quadratique $q(x, y, z) = 2x^2 - xy + z^2$. Déterminer de deux façons différentes une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$. En déduire la nature géométrique des surfaces Σ et Σ' de $\mathbb{R}^3$ d'équations respectives $2x^2 - xy + z^2 = 0$ et $2x^2 - xy + z^2 = 1$.*

Question 507 *[3] On demande d'appliquer la méthode de Gauss pour décomposer la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ définie sur $\mathbb{R}^3$. Préciser la base q-orthogonale obtenue et la signature de q. Que dire de plus ?*

Question 508 *[3] On demande d'appliquer la méthode de Gauss pour décomposer la forme quadratique $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_1x_3 + 2x_3x_4$ définie sur $\mathbb{R}^4$. Préciser la base q-orthogonale obtenue et la signature de q. Que dire de plus ?*

Question 509 *[3] Au cours d'un examen écrit, il est demandé de chercher la signature de la forme quadratique $q(x, y, z, t) = x^2 + 2xy + 3y^2 + xt$ définie sur $\mathbb{R}^4$. Sur une copie figurent des calculs justes qui aboutissent à :*

$$q = x^2 + 2xy + y^2 + 2y^2 + xt = (x + y)^2 + 2y^2 + \frac{1}{4}(x + t)^2 - \frac{1}{4}(x - t)^2,$$

et l'on peut lire la conclusion suivante : "La signature est $(3, 1)$ donc q est non dégénérée". Cette conclusion est-elle juste ? Expliquez et, s'il y a erreur, proposez une correction.

Question 510 *[3] Soit q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad q(x) \geq M \|x\|^2 .$$

Que peut-on dire si q est définie négative ?

Question 511 *[3] On considère une fonction f de classe C^2 définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

a) Si f admet un extrémum relatif en $a = (a_1, ..., a_n)$, démontrer que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

b) Qu'appelle-t-on point critique de f ?

c) Soit a un point critique de f. Qu'appelle-t-on hessienne de f en a ? Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 de f en a. On note q la forme quadratique de matrice la hessienne de f en a. Démontrer que :

- Si q définie positive, alors f admet un minimum local strict en a,

- Si q définie négative, alors f admet un maximum local strict en a,

- Si q n'est ni positive ni négative, f n'admet pas d'extrémum local en a.

d) Cas particulier où $n = 2$ – Utiliser le résultat démontré en c) pour rappeler et démontrer la règle qui permet de déterminer la nature d'un point critique $a = (a_1, a_2)$ d'une fonction f de deux variables en utilisant les nombres :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \;\; ; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \,.$$

Question 512 *[3] Connaissez-vous une CNS pour que la matrice réelle symétrique :*

$$M = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

soit définie positive ? Dans l'affirmative, démontrez-là.

Chapitre 9

Espaces vectoriels euclidiens

9.1 Généralités

Question 513 *[3] Comment définit-on un produit scalaire ? Existe-t-il des produits scalaires ?*

Question 514 *[3] (Oral du CAPES 2012) On sait que l'on peut définir le produit scalaire en utilisant des normes, des cosinus, ou des projetés orthogonaux. Démontrer l'équivalence entre ces trois définitions.*

Question 515 *[3] (Oral du CAPES 2012) Démontrer les formules qui donnent les développements de* $\cos(a \pm b)$ *et* $\sin(a \pm b)$ *en utilisant uniquement des outils de lycée.*

Question 516 *[3] Définir ce qu'est un espace vectoriel euclidien.*

Question 517 *[3] Qu'appelle-t-on espace préhilbertien réel ? Comment définit-on un espace de Hilbert réel ?*

Question 518 *[3]* F *et* G *sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien* E*. A quoi est égal* $(F \cap G)^{\perp}$ *?* $(F + G)^{\perp}$ *? Que peut-on dire de* $(F \cup G)^{\perp}$ *? On expliquera ses réponses sans pour autant tout démontrer précisément : on s'autorisera par exemple à utiliser des résultats connus concernant les formes bilinéaires symétriques.*

Question 519 *[3] Soit* E *un espace euclidien. Rappeler sans démonstration l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Enoncer et démontrer une CNS pour que l'on ait l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Question 520 *[3] Soit E un espace euclidien. Rappeler sans démonstration l'inégalité de Minkowski. Enoncer et démontrer une CNS pour que l'on ait l'égalité dans l'inégalité de Minkowski.*

Question 521 *[3] Soit E un espace vectoriel euclidien. Ecrire de deux façons différentes le produit scalaire x.y de deux vecteurs en n'utilisant que des normes.*

Question 522 *[3] Qu'appelle-t-on "identité du parallélogramme" dans un espace vectoriel euclidien ? Ecrivez-la et démontrez-la.*

Question 523 *[3] Soit E un espace vectoriel euclidien. Enoncez et démontrez le Théorème de Pythagore.*

Question 524 *[3] Soit $\varphi : E \times E \to E$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E de dimension finie. Soit E^* le dual de E. Montrer de deux façons différentes que l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\varphi}: & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & \varphi(x,.) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est l'image d'une base orthonormale de E par $\widetilde{\varphi}$?

Question 525 *[3] Si E est un espace vectoriel euclidien, montrer qu'il existe toujours au moins une base orthonormale de E.*

Question 526 *[3] Si E un espace vectoriel euclidien, montrer que toute famille orthonormale $(e_1, ..., e_p)$ peut être complétée en une base orthonormale.*

Question 527 *[3]Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E, démontrer que $E = F \oplus F^{\perp}$ et $F = (F^{\perp})^{\perp}$.*

Question 528 *[3] Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel euclidien E. Quand dit-on que F et G sont orthogonaux ? perpendiculaires ? supplémentaires orthogonaux ?*

Question 529 *[3] Dans $\overrightarrow{E}$, la relation d'orthogonalité est-elle une relation d'équivalence ? Et celle de perpendicularité ?*

Question 530 *[3] Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de E. Donnez l'expression du projeté orthogonal $p_D(\overrightarrow{u})$ d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E sur la droite D de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$. Démontrez-la.*

Question 531 *[3] Soit E un espace vectoriel euclidien. Soient F un sous-espace de E, et $(e_1, ..., e_p)$ une base orthogonale de F. Si $x \in E$, exprimer le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur F en fonction de x et des vecteurs de base e_i. Même question avec l'image $s(x)$ de x par la symétrie orthogonale de base F.*

Question 532 *[3] Soient E un espace vectoriel euclidien et s_Π la réflexion par rapport à un plan Π de E. Exprimez l'image $s_\Pi(\overrightarrow{u})$ d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E en utilisant le produit scalaire et en faisant intervenir un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à Π.* Application *: donnez l'expression analytique de la réflexion de $\mathbb{R}^3$ de base le plan d'équation $2x + y - 5z = 0$.*

Question 533 *[3] Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le plan vectoriel P d'équation $x - 2y + 6z = 0$. Trouver l'expression analytique de la projection orthogonale p sur P.*

Question 534 *[3] Dans $\mathbb{R}^3$, trouver l'expression analytique de la réflexion s par rapport au plan vectoriel P d'équation $x - 2y + 6z = 0$.*

Question 535 *[3] Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère le sous-espace vectoriel F d'équations :*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$$

Déterminez une base de F et une base de $F^\perp$, puis expliquez comment pour procéderiez pour trouver les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_F sur F et de la réflexion s_F par rapport à F.

Question 536 *[3] Soient F un sous-espace d'un espace vectoriel euclidien E, et $x \in E$. Montrer que la distance de x à F est atteinte en un seul point de F, et que ce point est le projeté orthogonal de x sur F.*

Question 537 *[3] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormale $e = (e_1, e_2, e_3)$. On considère le plan P d'équation $5x - 8y + z = 0$. Trouver une base orthonormale de ce plan.*

Question 538 *[3] Dans l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les trois vecteurs $u_1 = (1, 0, 2, -3)$, $u_2 = (2, 1, 0, 4)$ et $u_3 = (0, 0, -3, 6)$. Expliquez très précisément la méthode que vous emploieriez pour exhiber une base orthonormale de F (les calculs explicites ne sont pas demandés).*

Question 539 *[3] Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté avec un point. Soit u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme u^* de E tel que $u(x).y = x.u^*(y)$ pour tous $x, y \in E$.*

Question 540 *[3] Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. Montrer que la matrice de l'adjoint u^* de u dans une base orthonormale est égale à la transposée de la matrice de u dans cette même base, autrement dit que $\operatorname{Mat}(u^*; e) = {}^t\operatorname{Mat}(u; e)$.*

Question 541 *[3] Caractériser les formes linéaires définies sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ peut toujours être définie à l'aide d'un produit scalaire.*

Question 542 *[3] Déterminer tous les produits scalaires de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire définis sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

Question 543 *[3] Déterminer tous les produits scalaires de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire définis sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Que peut-on dire matriciellement ?*

9.2 Incursion dans les espaces affines

Question 544 *[3] Qu'est-ce qu'un angle droit ? Comment le définir ?*

Question 545 *[3] Comment démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$?*

Question 546 *[3] Connaissez-vous des différences concernant certains résultats sur le parallélisme ou l'orthogonalité de deux droites suivant que l'on se place dans le plan ou dans l'espace ? Existe-t-il des différences ?*

Question 547 *[3] Il arrive que l'on dise que deux droites de l'espace sont perpendiculaires. A quel moment ? Expliquez.*

Question 548 *[3] Comment peut-on aider les élèves de sa classe à se représenter mentalement deux plans perpendiculaires ? Deux plans en position générale (donc qui se coupent suivant une droite) ?*

Question 549 *[3] Démontrer que deux plans affines non parallèles d'un espace de dimension 3 s'interceptent toujours suivant une droite. Peut-on généraliser ce résultat à un espace affine de dimension n ?*

Question 550 *[3] Montrer qu'une bijection affine conserve les rapports d'aires. Indication : considérer une bijection affine f d'un espace affine euclidien E dans lui-même, et un triangle ABC, puis calculer le rapport $\mathcal{A}_{A'B'C'}/\mathcal{A}_{ABC}$ entre l'aire $\mathcal{A}_{A'B'C'}$ du triangle $A'B'C'$ image du triangle ABC par f, et l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ du triangle ABC.*

Question 551 *[1] Pouvez-vous définir ce qu'on entend par « système de coordonnées polaires d'un point » ? Quel rapport existe-t-il avec les définitions du module et de l'argument d'un nombre complexe ? Les coordonnées polaires d'un point sont-elle uniques ? Si M admet (ρ, θ) comme système de coordonnées polaires, quels sont tous les autres couples (ρ', θ') qui méritent aussi le nom de systèmes de coordonnées polaires de M ?*

9.3 Groupe orthogonal

Question 552 *[3] Proposer quatre définitions équivalentes d'une application orthogonale, et montrer que ces définitions sont bien équivalentes.*

Question 553 *[3] Quand dit-on qu'une matrice est orthogonale ? Proposer deux définitions et montrer que ces définitions sont équivalentes.*

Question 554 *[3] Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel euclidien E. On note s_F et s_G les symétries orthogonales par rapport à F et G. Déterminer complètement la composée $s_F \circ s_G$ lorsque F et G sont perpendiculaires.*

Question 555 *[3] Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel euclidien E. On note s_F et s_G les symétries orthogonales par rapport à F et G. Déterminer complètement la composée $s_F \circ s_G$ lorsque F et G sont orthogonaux.*

Question 556 *[3] Soit E un espace vectoriel euclidien. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Montrer que s est une application orthogonale si et seulement si $G = F^\perp$.*

Question 557 *[3] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Décrire toutes les applications orthogonales f de E telles que $f^2 = Id$.*

Question 558 *[3] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 3$. Etant donnés deux hyperplans H et Q de E, montrer qu'il est toujours possible de construire un hyperplan W perpendiculaire à H et à Q.*

Question 559 *[3] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$. Montrer qu'une application orthogonale de E s'écrit toujours comme un produit de réflexions*[1]*.*

Question 560 *[3] Soient x et y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une réflexion hyperplane s qui échange les vecteurs x et y si et seulement si $\|x\| = \|y\|$, et que dans ce cas et en supposant $x \neq y$, s est la réflexion par rapport à $(\mathbb{R}(x-y))^{\perp}$.*

Question 561 *[3] Soient E un espace vectoriel euclidien, F un sous-espace vectoriel de E, et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Soit f une application orthogonale de E.*
Montrer que $g = f \circ s_F \circ f^{-1}$ est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel que l'on précisera.

Question 562 *[3] Quelles sont les applications orthogonales du plan ? (On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit.)*

Question 563 *[3] Rechercher toutes les applications orthogonales du plan.*

Question 564 *[3] Dans le plan vectoriel euclidien, soient x et x' deux vecteurs non nuls et de même norme. Montrer qu'il existe une et une seule rotation (resp. réflexion) transformant x en x'.*

Question 565 *[3] Une rotation vectorielle en dimension 2 est-elle diagonalisable dans le plan euclidien ? Et une réflexion ?*

Question 566 *[3] Quelles sont les applications orthogonales de l'espace de dimension 3 ? (On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit.)*

Question 567 *[3] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Dresser rapidement le catalogue de toutes les applications orthogonales de E, puis utiliser ce catalogue pour vérifier le Théorème de Cartan-Dieudonné dans le cas particulier où $n = 3$.*

---

[1] L'examinateur donnera beaucoup d'indications à l'oral pour guider le candidat sur cette question de cours concernant la démonstration du Théorème de Cartan-Dieudonné, et ce sera l'occasion de voir comment celui-ci réagit aux indications proposées. On notera que l'on utilise au plus n réflexions pour répondre à cette question. En prolongement, on pourrait demander de déduire que, si $n \geq 3$, une application orthogonale positive de E s'écrit comme le produit de moins de n retournements, mais cela demanderait à nouveau de guider le candidat pas à pas.

Question 568 *[3] E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Montrer que le déterminant d'un triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de E^3 est indépendant du choix de la base orthonormale directe de E utilisée pour le définir, autrement dit, montrer que, pour toutes bases orthonormales directes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E,*

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3 \quad \det_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).$$

Question 569 *[3] Soit u une application orthogonale d'un espace euclidien E de dimension n (avec $n \geq 2$).*

a) Montrer que $u + u^*$ est un endomorphisme symétrique.

b) En déduire que u possède au moins un sous-espace invariant de dimension 1 ou 2.

c) Utiliser ce qui précède pour donner la forme générale des matrices des applications orthogonales de E.

9.4 Endomorphismes symétriques

Question 570 *[3] Soient u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.*

Question 571 *[3] Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n. Soit A la matrice de u dans une base orthonormale de E.*

a) Montrer que toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont réelles.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u (on dit alors que u est diagonalisable dans le groupe orthogonal).

Question 572 *[3] Démontrer que toute matrice carrée réelle diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs est une matrice symétrique définie positive.*

9.5 Angles

Question 573 *[3] Qu'est-ce qu'un angle ?*

Question 574 *[3] Pouvez-vous définir très précisément ce que l'on entend quand on parle d'angles orientés ?*

Question 575 *[3] Comment définissez-vous la mesure d'un angle orienté de vecteurs ?*

Question 576 *[3] Pouvez-vous définir très précisément ce que l'on entend quand on parle d'angle géométrique ?*

Question 577 *[3] Comment définir la mesure d'un angle géométrique ?*

Question 578 *[3] Démontrez qu'une rotation vectorielle plane conserve les angles orientés, tandis qu'une réflexion vectorielle les transforme en leurs opposés.*

Question 579 *[3] Comment fait-on pour orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ? Définir très précisément ce que l'on entend quand on parle d'espace vectoriel orienté.*

Question 580 *[3] On se place dans un espace vectoriel orienté E de dimension 3. Comment faire pour orienter un plan dans cet espace ? Quand dit-on que les orientations d'une droite et d'un plan P sont compatibles ?*

Question 581 *[3] Dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$, quand dit-on qu'un triangle ABC est direct ? On donnera une définition précise et rigoureuse. Si le triangle ABC est direct, qu'en est-il des triangles BCA et CAB ?*

Question 582 *[3] Définir rigoureusement ce que l'on entend quand on parle de secteur angulaire saillant. Et comment définit-on un secteur angulaire rentrant ?*

Question 583 *[3] Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan euclidien orienté, démontrer les formules :*

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \quad \textit{et} \quad \sin(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|},$$

où le déterminant est calculé dans une base orthonormale directe de E.

Question 584 *[3] Qu'entend-on par bissectrice d'un couple de demi-droites ? Proposez une définition rigoureuse.*

Question 585 *[3] Qu'entend-on par bissectrice d'un couple de droites ? Proposez une définition rigoureuse.*

Question 586 *[3] Montrer que $(-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\ \ (2\pi)$ quels que soient les vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

Question 587 *[3] Montrer que la somme des angles d'un triangle vaut un angle plat.*

Question 588 *[3] Si D_1 et D_2 sont deux droites du plan respectivement orthogonales à deux autres droites D'_1 et D'_2, montrer que $(D_1, D_2) = (D'_1, D'_2)\ (\pi)$.*

Question 589 *[3] Dans l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})$, on considère les plans P et P' d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Calculer une mesure de l'angle formé par les plans P et P' en fonction des coefficients de ces équations.*

9.6 Produit vectoriel

Question 590 *[3] Proposez une définition rigoureuse du produit vectoriel de deux vecteurs, puis justifiez que votre définition a un sens. Connaissez-vous d'autres définitions possibles ?*

Question 591 *[3] Proposez une expression de l'aire d'un triangle ABC utilisant le produit vectoriel. Preuve.*

Question 592 *[3] Etant donné un triangle ABC, on construit les symétriques A', B', C' respectifs des points A, B, C par rapport aux points B, C, A. Calculer l'aire du triangle $A'B'C'$ en fonction de celle du triangle ABC.*

Question 593 *[3] Utilisez le produit vectoriel pour démontrer que le centre de gravité G d'un triangle ABC divise l'aire du triangle en trois aires égales, autrement dit vérifie (avec des notations évidentes) :*

$$\mathcal{A}_{GAB} = \mathcal{A}_{GBC} = \mathcal{A}_{GCA} = \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{3}.$$

Question 594 *[3] (Oral du CAPES externe 2009) Calculer le volume d'un tétraèdre dont les arêtes au sommet sont donnés par les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}$ en fonction du volume d'un tétraèdre dont les arêtes au sommet sont donnés par les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$.*

Chapitre 10

Géométrie affine

10.1 Espaces affines

Question 595 *[8] Qu'est-ce qu'une droite ?*

Question 596 *{[4] Q4} Qu'est-ce qu'un espace affine ? Si n est un entier naturel non nul, on sait que $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel. Est-ce un espace affine ? Expliquez.*

Question 597 *{[4] Q5} Rappelez la relation de Chasles pour des vecteurs. Démontrez-la.*

Question 598 *{[4] Q5} Que représente le symbole $\overrightarrow{MN}$ quand M et N sont deux points du plan ? Définissez-le complètement.*

Question 599 *{[4] Q5} Démontrez la transitivité de la relation d'équipollence.*

Question 600 *{[4] Q9} Que peut-on dire de deux sous-espaces affines ?*

Question 601 *{[4] Q11} Soient F et G deux sous-espaces affines d'un espace affine E, F passant par A et de direction $\overrightarrow{F}$, G passant par B et de direction $\overrightarrow{G}$. Montrer que l'intersection $F \cap G$ n'est pas vide si et seulement si $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}$.*

Question 602 *{[6]} Dans l'espace de dimension trois, une droite D n'est pas parallèle à un plan P. Démontrer que $D \cap P$ est un singleton.*

Question 603 *{[4] Q15} Dans un espace de dimension trois, démontrer que deux plans non parallèles se coupent toujours suivant une droite.*

Question 604 *[6] Si deux points distincts A et B appartiennent à un même plan P, expliquez pourquoi la droite entière (AB) est incluse dans ce plan.*

Question 605 *[6] Si deux plans sont parallèles, montrer que tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et que les droites d'intersection sont parallèles.*

Question 606 *[6] Pouvez-vous démontrer le « théorème du toit » suivant lequel : si deux plans strictement sécants sont parallèles à une même droite Δ, alors leur droite d'intersection est parallèle à Δ.*

Question 607 *[6] Dans une espace de dimension 3, peut-on dire que deux droites sont strictement parallèles si et seulement si elles ne se coupent pas ?*

Question 608 *[6] On se place dans un espace affine de dimension 3. Comment faire pour obtenir une équation cartésienne d'un plan ?*

Question 609 *[6] On travaille dans un espace affine de dimension trois. Comment peut-on prévoir rapidement la position relative de deux plans P et P' en regardant uniquement les coefficients de leurs équations cartésiennes ?*

Question 610 *[6] Qu'appelle-t-on « équations cartésiennes » d'une droite dans un espace de dimension 3 ? [On remarquera que le pluriel dans « équations cartésiennes » ne s'entend pas à l'oral !]*

Question 611 *[6] Toutes les équations de plans affines dans $\mathbb{R}^3$ sont-elles de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$?*

Question 612 *[6] Trouvez une condition nécessaire et suffisante portant sur les coordonnées de quatre points A, B, C, D de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ pour que ces quatre points soient coplanaires. Justifiez.*

Question 613 *[5] (Oral du CAPES externe 2010) On considère les plan P et Q d'équations $x-y+2z-1=0$ et $-2x+4y-4z+1=0$.*

a) Montrer que ces plans se coupent suivant une droite D dont on déterminera une équation paramétrique.

b) Donner un vecteur directeur de D sans passer par sa représentation paramétrique.

Question 614 *[6] Soient A, B, C trois points distincts alignés sur une droite Δ. On dit que M est le conjugué harmonique de C par rapport à A et B si le birapport $[A,B,C,M]$ est égal à -1, autrement dit si :*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}=-1.$$

Montrer qu'il existe un et un seul point M qui vérifie cette condition, sauf si C est placé à un endroit que l'on déterminera.

Question 615 *[6] On définit le birapport de quatre points A, B, C, D alignés et distincts comme étant le réel :*

$$[A,B,C,D]=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

Montrer que cette définition a un sens.

Question 616 *[6] On considère deux droites Δ et D données par leurs représentations paramétriques :*

$$\Delta:\begin{cases}x=3+5t\\y=2+t\\z=7-6t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\qquad D:\begin{cases}x=2+7u\\y=5+3u\\z=1-4u\end{cases}\quad u\in\mathbb{R}.$$

Déterminer le lieu des milieux des segments $[MN]$ quand M et N décrivent respectivement Δ et D.

Question 617 *[6] Dans l'espace de dimension* 3*, on considère deux droites Δ et D non coplanaires. Pouvez-vous déterminer le lieu des milieux des segments $[MN]$ quand M et N décrivent respectivement Δ et D ?*

Question 618 *[6] Dans l'espace de dimension* 3*, on considère un plan P et une droite D en position générale. Déterminer le lieu des milieux des segments $[MN]$ quand M et N décrivent respectivement P et D. Que dire de ce lieu si l'on remplace D par un plan Π non parallèle à P ?*

Question 619 *[6] Montrer que les droites :*

$$\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=1+t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}\qquad D:\begin{cases}x=-4+u\\y=4+2u\\z=2+u\end{cases}\quad u\in\mathbb{R}.$$

sont coplanaires.

Question 620 *[6] Vous avez tendance à utiliser les termes « équations paramétriques » au lieu de « représentation paramétrique » lorsque vous parlez d'une droite ou d'un plan. Quelle expression devrions-nous choisir en terminale ? Expliquer...*

Question 621 *[6] Pouvez-vous rapidement donner une équation du plan P passant par les points $A\,(2,5,0)$, $B(0,1,-6)$ et $C(0,4,9)$?*

Question 622 *[6] Déterminez une équation cartésienne du plan passant par $A\,(5,8,-3)$, de direction* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ *où $\overrightarrow{u}\,(8,7,0)$ et $\overrightarrow{v}\,(-2,2,1)$.*

Question 623 *{[4] Q77} Démontrez que les ensembles définis par les équations paramétriques :*

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 5t \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x = -3 + 14t \\ y = -16 + 35t. \end{cases}$$

sont les mêmes.

Question 624 *{[4] Q79} Chercher des équations cartésiennes de la droite d'équations paramétriques :*

$$\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = 5 + 2t \\ z = 2 - 8t \text{ ?} \end{cases}$$

Question 625 *{[4] Q80} Dans $\mathbb{R}^3$, comment passer des équations paramétriques d'un plan à des équations cartésiennes ? Et inversement ?*

Question 626 *{[4] Q81} Comment obtenir une équation cartésienne du plan affine de $\mathbb{R}^3$ passant par $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ et de direction le plan vectoriel engendré par les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{v}\,\left(\alpha', \beta', \gamma'\right)$?*

Question 627 *{[4] Q82} Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A\,(1, 1, 1)$ et contenant la droite D d'équations :*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 4z + 1 = 0. \end{cases}$$

Question 628 *[5]Dans un espace affine euclidien de dimension 3, montrez que toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est bien celle d'un plan.*

Question 629 *[5] On se place dans un espace affine de dimension 3. Que dire si un <u>même</u> plan P admet deux équations cartésiennes $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + cz' + d' = 0$ différentes ? On démontrera ce que l'on affirmera.*

Question 630 *{[4] Q83} Soient H et W deux hyperplans affines d'un espace affine E de dimension n, définis respectivement par les formes affines φ et ψ. Démontrer l'équivalence suivante : $H = W \;\Leftrightarrow$ (φ et ψ sont proportionnelles).*

Question 631 *{[4] Q84} Etant donnés deux plans affines H_1 et H_2 d'équations respectives $f_i\,(M) = a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ $(1 \leq i \leq 2)$ se coupant suivant une droite D, et un plan H d'équation $f\,(M) = ax + by + cz + d = 0$, montrer l'équivalence :*

$$D \subset H \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2.$$

Question 632 *{[4] Q87} Dans le plan affine, on considère trois droites D_i $(1 \leq i \leq 3)$ d'équations $a_i x + b_i y + c_i = 0$. Montrer que ces droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si :*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Question 633 *[6] On considère trois droites D, D', D'' d'équations respectives $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, et $a''x + b''y + c'' = 0$. On rappelle que trois droites sont dites concourantes au sens strict si leur intersection est un singleton.*

a) Trouvez une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' pour que ces trois droites soient concourantes au sens strict. Montrer que cette condition exprime la nullité d'un déterminant 3×3.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que trois droites soient concourantes ou parallèles.

10.2 Barycentres

Question 634 *{[4] Q17} Définissez le barycentre d'un système fini de points. Pourquoi cette définition a-t-elle un sens ?*

Question 635 *{[4] Q18} Dans un espace affine sur $\mathbb{R}$, on considère n points A_1, ..., A_n et n réels α_1, ..., α_n. L'écriture $G = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$ a-t-elle un sens ? Expliquez.*

Question 636 *{[4] Q21} Enoncer et montrer la propriété d'associativité du barycentre.*

Question 637 *{[4] Q25} Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide d'un espace affine. Quel est l'ensemble des barycentres de points de $\mathcal{A}$? Preuve.*

Question 638 *{[4] Q26} Soient E un espace affine sur $\mathbb{R}$, et A, B deux points distincts de E. Quel est l'ensemble des barycentres des points A et B ? Preuve.*

Question 639 *{[4] Q27} Soient E un espace affine sur $\mathbb{R}$, et A, B, C deux points non alignés de E. Quel est l'ensemble des barycentres des points A, B et C ? Preuve.*

Question 640 *{[4] Q28} Donnez deux CNS pour qu'une partie non vide F d'un espace affine soit un sous-espace affine.*

Question 641 *{[4] Q37} Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminez l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $MA/MB = k$.*

Question 642 *{[4] Q38} Soient trois points non alignés A, B, C dans un plan, et quatre réels α, β, γ et k. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$.*

Question 643 *{[4] Q42} A, B, C sont trois points non alignés de l'espace. Quel est le lieu des points M tels que :*

$$||2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC}|| = ||2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}|| \text{ ?}$$

Question 644 *{[4] Q43} Soient A et B deux points distincts du plan, et M le barycentre de $A(3)$, $B(\alpha)$, où $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}$. Le point M décrit-il toute la droite (AB) quand α varie ? Existe-t-il un moyen d'obtenir toute la droite en utilisant un seul coefficient ?*

Question 645 *{[4] Q44} Une candidate écrit au tableau que M appartient à (AB) si et seulement si M est le barycentre de (A,α) et de (B,β) avec α et β réels, $\alpha + \beta \neq 0$. Question du jury : est-ce qu'on ne peut pas l'écrire mieux ?*

Question 646 *{[4] Q67} Qu'est-ce qu'un repère cartésien d'un espace affine ? Qu'entend-on par coordonnées cartésiennes d'un point ?*

Question 647 *{[4] Q68} Donnez les formules de changement de repères affines*

Question 648 *{[4] Q69} Quand dit-on qu'un système A_0, ..., A_k de $k+1$ points d'un espace affine est affinement libre ?*

Question 649 *{[4] Q70} Qu'est-ce qu'une base affine de E ?*

Question 650 *{[4] Q71} Montrer que tout point d'un espace affine de dimension finie possède au moins un système de coordonnées barycentriques dans un repère affine donné $\mathcal{R}$, et que deux systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point sont proportionnels.*

Question 651 *[5] Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté. Montrer que les coordonnées barycentriques d'un point M dans un repère affine (A,B,C) de $\mathcal{P}$ sont proportionnelles aux aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB.*

Question 652 *[5] Pouvez-vous énoncer le Théorème de Ceva en termes de barycentres ?*

Question 653 *{[5] Pouvez-vous énoncer le Théorème de Ménélaüs en termes de barycentres ?*

10.3 Convexité

Question 654 *{[4] Q45} Donnez au moins deux définitions d'un segment dans un espace affine.*

Question 655 *{[4] Q46} Qu'est-ce qu'une* partie convexe *d'un espace affine ?*

Question 656 *{[4] Q47} Montrez que les convexes de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Question 657 *{[4] Q48} Soit* $\mathcal{A}$ *une partie d'un espace affine* E*. Soit* Λ *l'ensemble des parties de* E *qui sont convexes et contiennent* $\mathcal{A}$*. On pose* $\mathcal{E} = \bigcap_{\mathcal{C} \in \Lambda} \mathcal{C}$*. Montrer que* $\mathcal{E}$ *est la plus petite partie convexe contenant de* E *contenant* $\mathcal{A}$*.*

Question 658 *{[4] Q49} A quoi est égale l'enveloppe convexe d'une partie* $\mathcal{A}$ *d'un espace affine ? Donner deux définitions possibles sans les justifier.*

Question 659 *{[4] Q50} Enoncez une CNS pour qu'une partie* $\mathcal{C}$ *d'un espace affine soit convexe.*

Question 660 *{[4] Q51} Montrer que l'image directe d'un convexe par une application affine est un convexe.*

Question 661 *{[4] Q52} Montrer que l'image réciproque d'un convexe par une application affine est un convexe.*

Question 662 *{[4] Q55} Soit* H *un hyperplan d'un espace affine de dimension finie. Proposez une définition d'un demi-espace de frontière* H*.*

Question 663 *Donnez (sans preuve) des propriétés des demi-plans.*

Question 664 *Montrer qu'un demi-plan est convexe.*

Question 665 *{[4] Q59} Sans utiliser les barycentres et en utilisant les propriétés classiques des demi-plans, démontrer que deux médianes* $[AA']$ *et* $[BB']$ *(considérées comme des segments) d'un triangle* ABC *sont toujours sécantes.*

Question 666 *{[4] Q60} Montrer qu'une bissectrice intérieure d'un triangle coupe le côté opposé du triangle. En déduire que deux bissectrices intérieures d'un triangle sont toujours sécantes.*

Question 667 *{[4] Q62} Quand dit-on qu'un polygone est convexe ?*

Question 668 *{[4] Q63} Qu'est-ce qu'un quadrilatère convexe ? croisé ? Dessinez un quadrilatère convexe, un quadrilatère croisé, et un quadrilatère qui n'est ni convexe, ni croisé.*

10.4 Applications affines

Question 669 *{[4] Q325} Quand dit-on qu'une application est affine ?*

Question 670 *{[4] Q326} Comment faire pour démontrer que deux applications affines f et g sont égales ?*

Question 671 *{[4] Q327} Que pouvez-vous dire d'une application affine injective en dimension finie ?*

Question 672 *{[4] Q328} Dans un plan, on considère trois points non alignés A_0, A_1, A_2, et trois points quelconques B_0, B_1, B_2. Montrez qu'il existe une et une seule application affine qui transforme les A_i en B_i $(0 \leq i \leq 2)$*

Question 673 *{[4] Q329} Quelle est la forme de l'expression analytique d'une application affine d'un plan dans lui-même ? Quand peut-on dire que cette application est bijective ?*

Question 674 *{[4] Q331} Quelle est l'image d'un carré par une application affine du plan dans lui même ? Et quand cette application est une bijection affine ?*

Question 675 *{[4] Q332} Montrer qu'une application affine du plan dans lui-même transforme une partie bornée du plan en une autre partie bornée.*

Question 676 *{[4] Q333} Montrer qu'une application affine conserve le parallélisme ?*

Question 677 *{[4] Q333} Une application affine transforme-t-elle toujours une droite en une droite ?*

Question 678 *Une application affine transforme-t-elle un segment en un segment ?*

Question 679 *Enoncez plusieurs propriétés remarquables d'une application affine.*

Question 680 *{[4] Q335} Montrer qu'une application affine* $f : E \to F$ *est surjective si et seulement si sa partie linéaire* l *est surjective.*

Question 681 *{[4] Q336} Montrer qu'une application affine* $f : E \to F$ *est injective si et seulement si sa partie linéaire* l *est injective.*

Question 682 *{[4] Q337} Soit* $f : E \to F$ *une bijection affine de partie linéaire* l*. Montrer que* f^{-1} *est affine de partie linéaire* l^{-1}*.*

Question 683 *{[4] Q338} Soient* $f : E \to F$ *et* $g : F \to G$ *deux applications affines de parties linéaires* $L(f)$ *et* $L(g)$*. Montrer que la composée* $g \circ f$ *est une application affine de partie linéaire* $L(g) \circ L(f)$*.*

Question 684 *{[4] Q339} Soit* $f : E \to F$ *une application affine de partie linéaire* l*. Montrer que l'image directe* $f(V)$ *d'un sous-espace affine* V *de* E *est un sous-espace affine de direction* $l(\overrightarrow{V})$*.*

Question 685 *{[4] Q340} Soit* $f : E \to F$ *une application affine de partie linéaire* l*. Montrer que l'image réciproque* $f^{-1}(W)$ *d'un sous-espace affine de* F *est soit vide, soit un sous-espace affine de direction* $l^{-1}(\overrightarrow{W})$*.*

Question 686 *{[4] Q341} Montrer qu'une application est affine si et seulement si elle conserve le barycentre.*

Question 687 *{[4] Q342} Soient* $f : E \to E$ *une application affine de partie linéaire* l*. Que peut-on dire de l'ensemble des points invariants par* f *? Démontrez-le.*

Question 688 *{[4] Q343} On veut montrer que, dans un espace affine* E *de dimension* 3*, deux équations cartésiennes différentes* $f(M) = 0$ *et* $g(M) = 0$ *d'un même plan* P *sont proportionnelles. Pour cela, on choisit un point* M_0 *n'appartenant pas au plan* P *et on introduit la partie suivante :*

$$F = \{M \in E \,/\, g(M_0)f(M) - f(M_0)g(M) = 0\}.$$

Achevez la démonstration...

Question 689 *{[4] Q344} Soit* $\mathcal{P}$ *le plan d'Argand-Cauchy. Montrer qu'une application* f *de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ *est affine si et seulement si elle admet une expression complexe de la forme* $f(z) = uz + v\overline{z} + w$ *où* $u, v, w \in \mathbb{C}$*.*

Question 690 *{[4] Q375} Soit E un espace affine. Qu'appelle-t-on groupe affine de E ? Une symétrie ou une projection appartient-elle au groupe affine de E ?*

Question 691 *{[4] Q378} Pouvez-vous décrire toutes les bijections affines qui laissent un hyperplan H invariant point par point ? (On ne demande pas de démontrer ce résultat.)*

10.5 Projections, symétries, affinités

Question 692 *{[4] Q345} Comment définissez-vous une projection affine ?*

Question 693 *Donner quelques propriétés d'une projection affine.*

Question 694 *{[4] Q346} Caractérisez l'assertion : M' est l'image de M par la projection affine p sur F parallèlement à G.*

Question 695 *{[4] Q347} Dans l'espace affine de dimension 3 rapporté à un repère, on considère le plan P d'équation $x+y+z=1$ et la droite D passant par le point A de coordonnées $(1,2,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(3,0,1)$. Cherchez l'expression analytique de la projection p sur P parallèlement à D.*

Question 696 *{[4] Q348} Montrer qu'une projection affine est une application affine de partie linéaire une projection vectorielle.*

Question 697 *{[4] Q349} Montrer qu'une application affine de partie linéaire une projection vectorielle et possédant au moins un point invariant, est une projection affine.*

Question 698 *{[4] Q350} Montrer qu'une application affine $p : E \rightarrow E$ est une projection affine si et seulement si $p^2 = p$.*

Question 699 *{[4] Q351} Comment définissez-vous une symétrie affine ?*

Question 700 *{[4] Q352} Caractérisez l'assertion : M' est l'image de M par la symétrie affine s de base F de direction $\overrightarrow{G}$.*

Question 701 *{[4] Q353} Dans l'espace affine de dimension 3 rapporté à un repère, on considère le plan P d'équation $x+y+z=1$ et la droite D passant par le point A de coordonnées $(1,2,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(3,0,1)$. Donnez l'expression analytique de la symétrie s par rapport à P parallèlement à D.*

Question 702 *{[4] Q354} Montrer qu'une symétrie affine est une application affine de partie linéaire une symétrie vectorielle.*

Question 703 *{[4] Q355} Montrer que toute application affine dont la partie linéaire est une symétrie vectorielle et possédant au moins un point invariant, est une symétrie affine.*

Question 704 *{[4] Q356} E est un espace affine dont le corps K des scalaires est de caractéristique différente de 2. Montrer qu'une application affine $s : E \to E$ est une symétrie affine si et seulement si $s^2 = Id$.*

Question 705 *{[4] Q357} Soit E un espace affine de dimension finie. Soient H un hyperplan de E, et D une droite de E non incluse dans H. On considère une affinité u de base H, de direction D et de rapport λ, et une bijection affine v de E sur E. Interpréter géométriquement l'application $f = v \circ u \circ v^{-1}$.*

Question 706 *{[4] Q358} Pouvez-vous définir ce qu'est une affinité ?*

Question 707 *{[4] Q358 à Q360} Donnez des propriétés des affinités qui vous viennent à l'esprit.*

Question 708 *{[5] On désire démontrer le Théorème de Ménélaüs en utilisant des projections. Ce Théorème énonce que, étant donné un triangle ABC non aplati et trois points M, N, P sur les supports (AB), (AC) et (BC) des côtés du triangle, et distincts des sommets du triangle, les points M, N, P sont alignés si et seulement si :*

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1.$$

Montrer cette équivalence en utilisant une projection sur une droite Δ parallèlement à (MP).

10.6 Homothéties-translations

Question 709 *{[4] Q362} Rappeler la définition d'une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$.*

Question 710 *{[4] Q362} Rappeler la définition d'une homothétie $h_{\Omega,k}$ de centre Ω et de rapport k.*

Question 711 *{[4] Q362} Montrer que f est une translation si et seulement si c'est une application affine de partie linéaire l'identité.*

Question 712 *{[4] Q362} Montrer que* f *est une homothétie-translation si et seulement si c'est une application affine de partie linéaire une homothétie vectorielle de rapport non nul.*

Question 713 *{[4] Q363}* E *est un espace affine de dimension* ≥ 2, *et* f *est une application de* E *dans* E. *Montrer que* f *est une homothétie-translation si et seulement si elle transforme toute droite* D *en une droite* $f(D)$ *parallèle à* D.

Question 714 *{[4] Q364} Que dire de la composée de deux homothéties ?*

Question 715 *{[4] Q365} Que dire de la composée d'une translation et d'une homothétie ?*

Question 716 *[?] On se place dans un plan affine euclidien* E. *Quelle est l'image d'un cercle* $\mathcal{C}(O,r)$ *de centre* O *et de rayon* r *par une homothétie-translation ? Justifier complètement votre réponse.*

Question 717 *[?] Soient* $\mathcal{C}$ *un cercle de centre* O *et de rayon* $r > 0$, *et* $\mathcal{C}'$ *un cercle de centre* O' *et de rayon* $r' > 0$. *Déterminer toutes les homothéties-translations qui transforment* $\mathcal{C}$ *en* $\mathcal{C}'$.

Question 718 *{[4] Q366} Soient* $ABCD$ *un trapèze de bases* $[AB]$ *et* $[CD]$, I *le milieu de* $[AB]$, J *celui de* $[CD]$. *Les droites* (BC) *et* (AD) *se coupent en* L, *et les diagonales* (BD) *et* (AC) *se coupent en* M. *Montrer que les points* L, M, I, J *sont alignés.*

Question 719 *{[4] Q367} Dessinez des segments* $[AB]$, $[CD]$ *et* $[EF]$ *strictement parallèles.* (AD) *et* (BC) *se coupent en* L, (DE) *et* (CF) *se coupent en* M, *enfin* (AE) *et* (BF) *se coupent en* N. *Montrer que les points* L, M, N *sont alignés.*

Question 720 *{[4] Q368} Soient* $[AB]$ *et* $[CD]$ *deux segments parallèles n'appartenant pas à une même droite, tels que* $AB \neq CD$. *Recherchez les homothéties qui transforment* $[AB]$ *en* $[CD]$.

Question 721 *{[4] Q370} Dans l'espace affine de dimension* 3, *on considère deux plans* H *et* H' *strictement parallèles, et deux droites* d *et* d' *strictement parallèles. On suppose que* d *coupe* H *en* A *et* H' *en* B, *tandis que* d' *coupe* H *en* C *et* H' *en* D. *Démontrer que le quadrilatère* $ABDC$ *est un parallélogramme.*

Question 722 *{[4] Q371} Montrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont homothétiques si et seulement si leurs côtés sont parallèles. Ce résultat est-il vrai en dimension n ?*

Question 723 *{[4] Q373} Enoncez le Théorème de Ménélaüs et sa réciproque. Pouvez-vous le démontrer en utilisant des homothéties ?*

10.7 Théorème de Thalès

Question 724 *[5] On se place au niveau de la classe de quatrième. Plus précisément, on suppose que l'on dispose des propriétés et caractérisations usuelles du rectangle, ainsi que de l'équivalence entre les assertions « le triangle ABM est rectangle en M » et « M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ », mais on demande que le Théorème de Thalès ou sa réciproque ne soient pas utilisés dans les raisonnements proposés.*
En respectant ces contraintes, démontrer les trois résultats suivants connus sous le nom de « Théorème de la droite des milieux » :

a) La droite joignant les milieux des deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

b) Si I (resp. J) est le milieu de $[AB]$ (resp. $[AC]$), alors $BC = 2IJ$.

c) La droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle et parallèle à un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.

Question 725 *{[4] Q97} Enoncez et démontrez le Théorème de Thalès.*

Question 726 *{[4] Q98} Enoncez le Théorème de Thalès dans le triangle, puis démontrez-le en utilisant uniquement les axiomes d'un espace affine. Utilisez ce « Théorème de Thalès dans le triangle » pour démontrer le Théorème de Thalès « général » concernant trois parallèles et deux sécantes.*

Question 727 *{[4] Q99} Enoncez le Théorème de Thalès. Démontrez-le en utilisant seulement des projections.*

Question 728 *[6] Quel rapport y a-t-il entre le Théorème de Thalès et les projections ? Explicitez ce rapport.*

Question 729 *{[4] Q100} Enoncez le Théorème de Thalès. Démontrez-le en utilisant seulement des homothéties.*

Question 730 *[**?**] Démontrez la réciproque du Théorème de Thalès dans le triangle en utilisant uniquement des homothéties.*

Question 731 *{[4] Q101} Enoncez et démontrez la réciproque du Théorème de Thalès.*

Question 732 *{[4] Q103} La réciproque du Théorème de Thalès est-elle vraiment une réciproque ?*

Question 733 *{[4] Q104} Que diriez-vous à un élève qui écrirait ainsi la réciproque du Théorème de Thalès (en faisant un dessin correct) :*

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow (AA')//(BB') \quad ?$$

Question 734 *{[4] Q105} Définissez ce qu'est la mesure algébrique d'un bipoint (A, B).*

Question 735 *[6] Une mesure algébrique de bipoints dépend du choix d'un vecteur directeur sur la droite considérée. Or le Théorème de Thalès s'intéresse à des quotients de la forme $\overline{AB}/\overline{AC}$ où A, B, C sont des points alignés. Ces quotients $\overline{AB}/\overline{AC}$ doivent donc dépendre du choix d'un repère sur la droite (AB) et (AC), ce qui est ennuyeux. Qu'en pensez-vous ?*

Question 736 *{[4] Q106} Le Théorème de Thalès est-il un résultat affine ou euclidien ?*

Question 737 *{[4] Q107} Dessinez quelques figures-clés rencontrées dans le secondaire concernant le Théorème de Thalès.*

Question 738 *{[4] Q109} Dans quelles classes du secondaire étudie-t-on le Théorème de Thalès ? Et sa réciproque ? Sous quelles formes ?*

Question 739 *{[4] Q110} A quoi sert le Théorème de Thalès ?*

Question 740 *{[4] Q111} Quel rapport y-a-t-il entre le Théorème de Thalès et les applications affines ? Preuve.*

Question 741 *{[4] Q112} Connaissez-vous une preuve du Théorème de Thalès utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?*

Question 742 *{[4] Q114} Proposez une démonstration du Théorème de Thalès qui utilise des aires.*

Question 743 *[6] En utilisant uniquement le Théorème de la droite des milieux, démontrer que le projeté du milieu d'un segment est égal au milieu du segment projeté.*

10.8 Dans l'espace de dimension 3

Question 744 *Comment expliquer la position relative d'une droite et d'un plan à ses élèves ?*

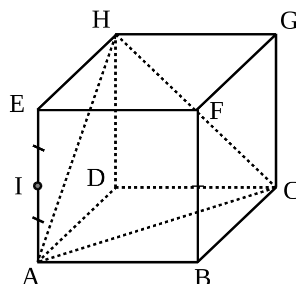
Question 745 *Expliquez la position relative d'une droite (resp. un plan) et d'une sphère ? d'une boule ? d'un cône ?*

Question 746 *~[4] Soient D et D' deux droites de l'espace. Démontrer que toute droite Δ incluses dans $D \cup D'$ est égale à D ou à D'.*

Question 747 *Montrer qu'une droite ne peut pas être incluse dans une sphère (resp. une boule).*

Question 748 *Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 5z = 0$. Que peut-on dire de ce plan ? Chercher un repère orthonormal de P. Connaissez-vous une forme linéaire qui définisse P ?*

Question 749 *[7] Tracer la section du cube ci-dessous avec le plan Π passant par le milieu I de $[AE]$ et parallèle au plan (ACH). Justifiez la construction.*



10.9 Divers

Question 750 *[8] On demande de discuter le nombre de points d'intersection entre une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ et une droite D d'équation $y = mx$ lorsque m parcourt $\mathbb{R}$.*

Chapitre 11

Géométrie euclidienne

11.1 Isométries

Question 751 *{[4] Q395} Pouvez-vous donner la définition d'une isométrie ?*

Question 752 *{[4] Q379} Donnez deux définitions différentes d'une isométrie affine.*

Question 753 *{[4] Q380} Une application qui conserve les distances est-elle nécessairement affine ?*

Question 754 *{[4] Q381} Que pouvez-vous dire sur les isométries planes et les angles de vecteurs ?*

Question 755 *{[4] Q382} Soit f une application d'un certain plan affine euclidien E dans lui-même. On suppose que f conserve les distances.* SANS *avoir recours à la notion d'application affine, donc en utilisant uniquement la conservation des distances, démontrer que :*
a) f est injective.
b) f transforme un segment en un segment, une demi-droite en une demi-droite, et une droite en une droite.
c) f est bijective.

Question 756 *[5] Soit O un point d'un espace affine euclidien E. Montrer que toute isométrie affine f de E s'écrit de façon unique $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g$ où $t_{\overrightarrow{u}}$ est une translation et g une isométrie qui admet O comme point invariant. Cette décomposition est-elle commutative ?*

Question 757 *{[4] Q383} Quelle est la nature de la composée $f = s_{D'} \circ s_D$ de deux réflexions affines planes par rapport à des droites D' et D parallèles ? Que dire de plus ?*

Question 758 *{[4] Q384} Quelle est la nature de la composée $f = s_{D'} \circ s_D$ de deux réflexions affines planes par rapport à des droites D' et D sécantes en un point Ω ? Que dire de plus ?*

Question 759 *{[4] Q412} Quelle est la nature de la composée $f = r \circ t$ d'une rotation plane r de centre Ω et d'angle θ, et d'une translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$? Construire les éléments géométriques qui caractérisent f.*

Question 760 *{[4] Q413} Quelle est la nature de la composée $f = r_{B,\beta} \circ r_{A,\alpha}$ de deux rotations affines planes de centres A et B distincts, d'angles α et β ? Construire les éléments géométriques qui caractérisent f.*

Question 761 *[5] Quelle est la nature de la composée $f = r_{\Omega,\theta} \circ s_D$ d'une rotation plane $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω et d'angle θ non nul, et d'une réflexion s_D par rapport à une droite D ? Construire les éléments géométriques qui caractérisent f.*

Question 762 *[6] On considère un triangle ABC et les réflexions s_A, s_B et s_C par rapport à chacune des bissectrices intérieures de ce triangle issues de A, B et C. Déterminez la nature de la composée $s_A \circ s_B \circ s_C$.*

Question 763 *{[4] Q385} Enoncer le Théorème fondamental concernant les isométries affines d'un espace affine euclidien (on ne demande pas de le démontrer).*

Question 764 *{[4] Q386} Donnez le catalogue de* TOUTES *les isométries affines du plan. On ne demande pas de démonstration, mais on veut disposer d'une description géométrique complète de ces isométries.*

Question 765 *{[4] Q387} Décrire géométriquement toutes les isométries affines d'un espace affine euclidien de dimension 3.*

Question 766 *{[4] Q388} On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$.*

a) Montrer qu'une isométrie qui admet trois points non alignés invariants est l'identité.

b) Montrer qu'une isométrie distincte de l'identité qui admet deux points distincts A et B invariants est la réflexion par rapport à la droite (AB).

c) Montrer qu'une isométrie qui possède un unique point invariant Ω est la composée de deux réflexions d'axes passant par Ω.

d) Montrer qu'une isométrie sans points invariants est soit une translation de vecteur non nul, soit la composée de trois réflexions.

e) Montrer qu'une isométrie plane est la composée d'au plus trois réflexions.

Question 767 *{[4] Q390} Vous dites qu'une isométrie plane conserve le parallélisme, l'alignement et les barycentres. Quelle est la propriété la plus forte ?*

Question 768 *{[4] Q391} Pouvez-vous nous donner des exemples de fonctions du plan dans le plan qui conservent le barycentre ?*

Question 769 *{[4] Q392} Pouvez-vous montrer que les isométries sont injectives ?*

Question 770 *{[4] Q393} Comment démontrer que l'image d'une droite par une isométrie est une droite ?*

Question 771 *{[4] Q394} Vous avez dit que si une isométrie possède une droite invariante, alors il s'agit d'une réflexion. Pouvez-vous le démontrer ?*

Question 772 *{[4] Q396} On travaille dans un plan. Pouvez-vous donner une définition de la symétrie d'axe Δ accessible en sixième ?*

Question 773 *{[4] Q397} Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien. Montrez qu'il existe une et une seule réflexion qui échange les points A et B. Déterminez-là.*

Question 774 *[5] A-t-on besoin d'orienter le plan pour définir l'ensemble des déplacements ?*

Question 775 *[5] Que pouvez-vous dire de la composée $f = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$ d'une réflexion par rapport à une droite D et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$? De ses points invariants ?*

Question 776 *[5] On suppose dans cette question que l'on connaît tout le catalogue des isométries planes. En utilisant seulement ce « catalogue », pouvez-vous démontrer que, étant donnés deux points distincts A et B, et deux autres points distincts A' et B' tels que $A'B' = AB$, il existe un et un seul déplacement f tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Le résultat reste-t-il vrai si l'on demande à f d'être un antidéplacement ?*

Question 777 *[5] Déterminer les éléments géométriques qui définissent la réflexion glissée qui transforme deux point A, B distincts en deux points A', B' donnés tels que $A'B' = AB$.*

Question 778 *{[4] Q398} Soit P le plan médiateur d'un segment $[AB]$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA < MB$.*

Question 779 *{[4] Q398} Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien E de dimension 3. Soit P le plan orthogonal à (AB) et passant par le milieu I de $[AB]$. Le plan P partage l'espace en deux demi-espaces ouverts : E_A contenant A, et E_B contenant B. Montrer que :*

$$\begin{cases} P = \{M \in E \,/\, MA = MB\} \\ E_A = \{M \in E \,/\, MA < MB\} \\ E_B = \{M \in E \,/\, MB < MA\} . \end{cases}$$

Question 780 *{[4] Q399} Soient deux tétraèdres isométriques $ABCD$ et $A'B'C'D'$. Montrer qu'il existe une unique isométrie f de l'espace qui vérifie $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$.*

Question 781 *{[4] Q401} Dans un plan affine euclidien, on considère une symétrie s par rapport à une droite D parallèlement à une droite Δ. Montrer que s conserve les distances si et seulement si D est orthogonale à Δ.*

Question 782 *{[4] Q402} Proposez deux définitions d'une rotation affine plane.*

Question 783 *{[4] Q405} Démontrer qu'une rotation affine plane conserve les distances.*

Question 784 *{[4] Q406} Qu'appelle-t-on rotation affine dans l'espace de dimension 3 ?*

Question 785 *{[4] Q407} Quelle est la forme générale de l'expression analytique d'une isométrie plane dans un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan ?*

Question 786 *{[4] Q407} Quelle est l'expression analytique de la réflexion s_{Ox} par rapport au premier axe de coordonnées ?*

Question 787 *{[4] Q407} Quelle est l'expression analytique de la rotation r de centre O amenant le point de coordonnées $(1, 0)$ sur le point de coordonnées $(0, 1)$?*

Question 788 *{[4] Q408} Doit-on orienter le plan pour pouvoir parler d'isométries ? de déplacements ? d'antidéplacements ?*

Question 789 *{[4] Q411} Soient E un espace affine, f une application affine de E dans lui-même, et $\mathcal{F}$ une partie de E. Si O est un centre de symétrie de $\mathcal{F}$, montrer que $f(O)$ est un centre de symétrie de $f(\mathcal{F})$. La réciproque est-elle vraie ?*

Question 790 *{[4] Q414} Quand peut-on dire que deux triangles sont isométriques ?*

Question 791 *{[4] Q414} Enoncez les trois cas d'isométrie des triangles, puis démontrez-en un au choix.*

Question 792 *{[4] Q415} Deux triangles qui possèdent trois éléments égaux (des côtés ou des angles) sont-ils nécessairement isométriques ? Justifiez votre réponse.*

Question 793 *{[4] Q419} Quelle est la forme complexe d'une isométrie plane ?*

Question 794 *{[4] Q424} Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*. Soit* Ox *l'axe des abscisses. On considère la droite* D *passant par le point* I *de coordonnées* $(1,0)$*, telle que* $(Ox, D) = \pi/3\ \ (\pi)$*. Exprimer les coordonnées* (x', y') *du symétrique* M' *d'un point* M *par rapport à* D *en fonction des coordonnées* (x, y) *de* M*.*

Question 795 *{[4] Q425} Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*. Soit* r *la rotation de centre* $\Omega\,(1,0)$ *et d'angle* $\pi/3$*. Soit* M *un point de coordonnées* (x, y)*. Exprimer les coordonnées* (x', y') *de* $r\,(M)$ *en fonction de celles de* M*.*

Question 796 *{[4] Q431} Soit* P *une partie finie de cardinal* $n \geq 2$ *du plan affine euclidien. Montrer qu'il existe au plus* n *déplacements et* n *antidéplacements conservant* P*.*

Question 797 *{[4] Q432} Déterminer toutes les isométries planes laissant un point* A *invariant.*

Question 798 *{[4] Q433} Déterminer toutes les isométries planes laissant une paire de points* $\{A, B\}$ *invariante.*

Question 799 *{[4] Q434} Quelles sont les isométries planes qui laissent une droite* D *globalement invariante ?*

Question 800 *{[4] Q444} Déterminer les isométries du plan qui conservent un polygone régulier à* n *sommets* $(n \geq 3)$*.*

Question 801 *[**?**] On lit souvent que le graphe de la fonction réciproque* f^{-1} *d'une fonction bijective* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est égal au symétrique du graphe de* f *par rapport à la première bissectrice. Cela provient de la propriété* (P) *suivante : pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*, le point* $N\,(b, a)$ *est le symétrique orthogonal de*

$M(a,b)$ par rapport à la première bissectrice.

a) Démontrer la propriété (P) lorsque le graphe de f est dessiné dans un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dont les vecteurs de base ont la même norme (sans être forcément orthogonaux).

b) Le résultat est faux quand $\mathcal{R}$ est un repère quelconque, mais, dans ce cas, démontrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, le point $N(b,a)$ continue d'être le symétrique de $M(a,b)$ dans une symétrie que l'on précisera.

11.2 Similitudes

Question 802 *{[4] Q447} Qu'est-ce qu'une similitude vectorielle ?*

Question 803 *{[4] Q447} Donner au moins trois définitions équivalentes d'une similitude vectorielle.*

Question 804 *{[4] Q448} Qu'est-ce qu'une similitude affine ?*

Question 805 *{[4] Q448} Donner au moins deux définitions équivalentes d'une similitude affine.*

Question 806 *{[4] Q449} Montrer qu'une application f du plan affine dans lui-même conserve les rapports de distances si et seulement si c'est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.*

Question 807 *{[4] Q449} Enoncer quelques propriétés intéressantes vérifiées par une similitude affine.*

Question 808 *{[4] Q449} Montrer qu'une similitude affine est bijective.*

Question 809 *{[4] Q449} Montrer qu'une similitude affine transforme une droite en une droite, un segment en un segment, une demi-droite en une demi-droite, conserve les barycentres, le parallélisme et les contacts.*

Question 810 *{[4] Q449} Montrer qu'une similitude affine conserve ou inverse les angles orientés.*

Question 811 *{[4] Q449} Montrer qu'une similitude affine transforme un cercle en un cercle.*

Question 812 *{[4] Q449} Montrer qu'une similitude affine conserve l'orthogonalité.*

Question 813 *{[4] Q450} Soient E un espace affine euclidien de dimension n, et f une similitude de E de rapport $k \neq 1$. Montrer que :*

a) f admet un unique point fixe Ω.

b) f s'écrit de manière unique $f = h_{\Omega,k} \circ g$ où $h_{\Omega,k}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport k, et où g est une isométrie affine de E qui laisse le point Ω invariant.

c) $h_{\Omega,k} \circ g = g \circ h_{\Omega,k}$.

Question 814 *{[4] Q451} Donnez le catalogue de* TOUTES *les similitudes affines du plan.*

Question 815 *{[4] Q453} Existe-t-il des similitudes planes sans points invariants ? Dans l'affirmative, pouvez-vous les décrire ?*

Question 816 *{[4] Q454} On dit souvent qu'une projection sur une droite parallèlement à une autre « conserve les rapports ». Mais alors, peut-on dire qu'une projection est une similitude ?*

Question 817 *{[4] Q455} Montrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ (non aplatis) sont semblables (dans cet ordre) si et seulement si :*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

Question 818 *{[4] Q455} Montrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ (non aplatis) sont semblables (dans cet ordre) si et seulement si :*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \text{ et } \widehat{B} = \widehat{B'}.$$

Question 819 *{[4] Q455} Montrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ (non aplatis) sont semblables (dans cet ordre) si et seulement si :*

$$\widehat{A} = \widehat{A'} \text{ et } \widehat{B} = \widehat{B'}.$$

Question 820 *{[4] Q458} Quelle est l'image d'un cercle $\mathcal{C}(O, r)$ de centre O et de rayon r par une similitude f de rapport k ?*

Question 821 *{[4] Q456} On considère deux cercles distincts $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centre O et O', et de rayons r et r'. On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points distincts A et B. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s de centre A qui transforme le cercle $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.*

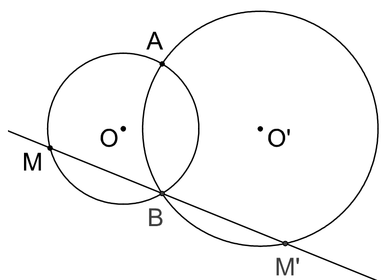


FIG. 11.1 – Lien entre M et M' ?

Question 822 *{[4] Q457} Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points distincts A et B (*FIG. *11.1). Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de B. Montrer que l'image de M par la similitude directe de centre A qui envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$, est le second point d'intersection de la droite (BM) et du cercle $\mathcal{C}'$ [Ind. : on pourra montrer que les triangles OAM et $O'AM'$ sont directement semblables en utilisant le Théorème de l'angle inscrit.]*

Question 823 *{[4] Q459} Si A, B, C, D sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, montrer qu'il existe une et une seule similitude directe transformant A en C et B en D. Le résultat reste-t-il vrai avec une similitude indirecte ?*

Question 824 *{[4] Q460} Soient O, A et B trois points distincts d'un plan affine euclidien. Soit s une similitude directe de centre O. On pose $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. Montrer qu'il existe une similitude directe σ de centre O qui transforme A en B, et A' en B'.*

Question 825 *{[4] Q461} Soit f un automorphisme d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n. Montrer que f conserve l'orthogonalité si et seulement si c'est une similitude vectorielle. On pourra introduire les formes linéaires :*

$$l: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & x.y \end{array} \quad et \quad h: \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x).f(y). \end{array}$$

11.3 Bissectrices

Question 826 *{[4] Q115} Trouver toutes les réflexions qui échangent deux droites D et D' sécantes en O.*

Question 827 *{[4] Q116} Proposer une définition d'une bissectrice d'un couple de demi-droites* $([OA), [OB))$.

Question 828 *{[4] Q116} Comment peut-on définir la bissectrice intérieure issue de A d'un triangle ABC ?*

Question 829 *{[4] Q116} Comment peut-on définir la bissectrice extérieure issue de A d'un triangle ABC ?*

Question 830 *{[4] Q117} Comment construire la bissectrice d'un couple de demi-droites au collège ?*

Question 831 *{[4] Q119} Montrer que l'ensemble des points équidistants de deux droites sécantes D et D' est la réunion des bissectrices du couple* (D, D').

Question 832 *{[4] Q120} Quel est l'ensemble des points du plan situés à égale distance de deux demi-droites de même origine $[Ox)$ et $[Oy)$? Démontrez-le.*

Question 833 *{[4] Q121} Deux tangentes en M et M' à un cercle de centre O se coupent en un point I. Montrer que (IO) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{MIM'}$.*

Question 834 *{[4] Q122} Soient D et D' deux droites strictement sécantes en un point O. Montrer que les seules droites Δ incluses dans $D \cup D'$ sont D et D'.*

Question 835 *{[4] Q125} Que peut-on dire du point M de la* FIG *11.2 ?*

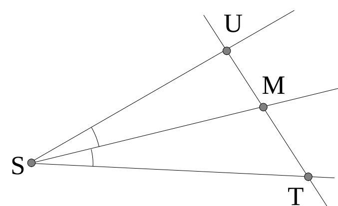


FIG. 11.2 – Que dire de M ?

Question 836 *{[4] Q88} On demande de rechercher des équations cartésiennes des bissectrices des droites d'équations $y = 8x + 3$ et $7x - 5y = 4$.*

Question 837 *[6] Soit ABC un triangle. Soit $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal d'origine A, tel que $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires de même sens.*

a) Déterminez une équation cartésienne de la bissectrice intérieure Δ issue de A du triangle ABC.

b) Déterminez une équation cartésienne de la droite (BC).

c) Soit I l'intersection de Δ et (BC). Connaissez-vous une propriété vérifiée par I ? Expliquer comment l'on pourrait faire pour démontrer analytiquement cette propriété (on ne demande pas d'effectuer tous les calculs).

11.4 Triangles

Question 838 *[7] Dans le plan, on considère un triangle non aplati ABC. Pouvez-vous définir le secteur angulaire saillant déterminé par les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$? Et le secteur angulaire rentrant ?*

Question 839 *[6] a) Montrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.*

b) Soit ABC un triangle non aplati. Montrer qu'il existe un et un seul cercle qui passe par les sommets de ce triangle.

Question 840 *{[4] Q29} Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.*

Question 841 *{[4] Q142} Démontrez que les trois médianes d'un triangle sont concourantes en utilisant seulement des outils du collège.*

Question 842 *{[4] Q30} Montrer que deux médianes d'un triangle ne sont jamais confondues.*

Question 843 *[6] Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

Question 844 *[5] Soient G et O le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit d'un triangle ABC. Soit H le point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Montrer que H est l'orthocentre de ABC et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (relation d'Euler).*

Question 845 *[6] Soient O, H et G le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité d'un triangle ABC. On note A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC, avec les conventions usuelles.*

a) Que pouvez-vous dire des points O, H et G ?

b) Existe-t-il une homothétie h qui transforme le triangle $A'B'C'$ en ABC ?

c) Utilisez h pour trouver une relation de dépendance entre $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$.

Question 846 *{[4] Q31} Montrer que les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.*

Question 847 *{[4] Q31} Quelles sont les coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit dan un triangle ABC, dans le repère affine (A, B, C) ? Preuve ? Que peut-on déduire ?*

Question 848 *{[4] Q31} Que dire des bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle ?*

Question 849 *[7] Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur un triangle non aplati ABC pour que les médiatrices des côtés $[AB]$ et $[AC]$ soient perpendiculaires.*

Question 850 *[7] Montrer que, dans un triangle ABC, les bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ ne peuvent pas être perpendiculaires.*

Question 851 *[7] Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur un triangle ABC pour que les hauteurs de ce triangle issues des sommets B et C soient perpendiculaires.*

Question 852 *[7]* ***Théorème de la médiane***
Soit ABC un triangle non aplati. Soit I le milieu de $[BC]$. Démontrer que :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

Question 853 *{[4] Q132} Enoncer, puis démontrer le Théorème de Pythagore et sa réciproque.*

Question 854 *{[4] Q133} Démontrer le Théorème de Pythagore sans utiliser le produit scalaire.*

Question 855 *{[4] Q134} Démontrer la réciproque du Théorème de Pythagore sans utiliser le produit scalaire.*

Question 856 *{[4] Q135} Montrer qu'un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.*

Question 857 *{[4] Q136} Soient ABC un triangle rectangle en A, et H le pied de la hauteur de ce triangle issue de A. Montrer que $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.*

Question 858 *{[4] Q136} Montrer que le pied de la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle appartient à l'hypoténuse.*

Question 859 *{[4] Q137} Soient ABC un triangle rectangle en A, et H le pied de la hauteur de ce triangle issue de A. Montrer que $AH^2 = \overline{BH}.\overline{HC}$.*

Question 860 *{[4] Q138} Si le triangle ABC est rectangle en A, montrer que :*

$$AH \times BC = AB \times AC.$$

Question 861 *{[4] Q143} Enoncez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle de côtés de longueurs imposées a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$) soit constructible. Démontrez-là.*

Question 862 *[4] (Oral du CAPES interne 2007) Etant donnés 3 nombres positifs a, b, c tels que $a^2 + b^2 = c^2$, montrez que l'on peut tracer un triangle dont les côtés sont de longueurs a, b et c.*

Question 863 *{[4] Q145} Quel est l'ensemble des point M du plan qui se projettent orthogonalement sur les supports des côtés d'un triangle en trois points alignés ?*

Question 864 *{[4] Q145} On note P, Q, R les projetés orthogonaux d'un point M du plan sur les côtés (AB), (BC) et (CA) d'un triangle ABC. Montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.*

Question 865 *{[4] Q147} Enoncez et démontrez la formule d'Al Kashi dans un triangle quelconque.*

Question 866 *{[4] Q148} Soit ABC un triangle rectangle en A. Démontrez que :*

$$\cos \widehat{B} = \frac{BA}{BC} \ ; \quad \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} \quad \textit{et} \quad \tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}.$$

Question 867 *{[4] Q149} Soit ABC un triangle de côtés a, b, c, d'angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, d'aire S. Soit R le rayon de son cercle circonscrit. Démontrez la* formule des sinus *:*

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}.$$

Question 868 *{[4] Q152} Montrer que la bissectrice intérieure issue de A d'un triangle ABC coupe (BC) en un point I_A tel que :*

$$\frac{\overline{I_A B}}{\overline{I_A C}} = -\frac{AB}{AC}.$$

Sous quelle condition la bissectrice extérieure issue de A coupe-t-elle (BC) ? Montrer qu'alors, si J_A désigne ce point :

$$\frac{\overline{J_AB}}{\overline{J_AC}} = \frac{AB}{AC}.$$

Peut-on dire que les pieds des bissectrices issues de A sont les points de la droite (BC) tels que $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$?

Question 869 *{[4] Q154} Soit ABC un triangle non isocèle en A. Déterminer le lieu $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que :*

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}.$$

Question 870 *[3] En utilisant des aires, démontrer que le centre de gravité G d'un triangle ABC est l'unique point intérieur au triangle qui divise l'aire du triangle en trois aires égales, autrement dit vérifie :*

$$\mathcal{A}_{GAB} = \mathcal{A}_{GBC} = \mathcal{A}_{GCA} = \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{3}$$

où $\mathcal{A}_{MNP}$ désigne de façon générale l'aire d'un triangle MNP.

Question 871 *[3] On note A', B' et C' les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Exprimez l'aire du triangle des milieux $A'B'C'$ en fonction de l'aire du triangle ABC.*

Question 872 *[5] On connaît la définition d'une médiane dans un triangle. Existe-t-il une autre définition du mot "médiane" dans un autre champ des mathématiques ? Dans l'affirmative, pouvez-vous faire le lien entre ces deux notions ?*

Question 873 *[5] Soit ABC un triangle non aplati, et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).*

a) Montrer que :

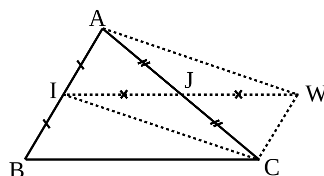
- Si $\widehat{B}$ est aigu (au sens large), H appartient à la demi-droite $[BA)$.

- Si $\widehat{B}$ est obtus (au sens strict), H n'appartient pas à la demi-droite $[BA)$.

b) Que dire des pieds des hauteurs d'un triangle acutangle ?

Question 874 *[5] Soit ABC un triangle et H le projeté de C sur la droite (AB). Montrer que H appartient au segment $[AB]$ dès que l'on suppose que le côté $[AB]$ est le plus long côté du triangle ABC. La réciproque est-elle vraie ?*

Question 875 *[6]Un jury d'oral demande au candidat de démontrer que la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté, comme il pourrait le faire en classe de quatrième. Le candidat propose la démonstration suivante :*
« Si I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$, je trace le symétrique W de I par rapport à J. Le quadrilatère $IAWC$ possède des diagonales qui se coupent en leur milieu. Il s'agit donc d'un parallélogramme et je peux affirmer que les segments $[IA]$ et $[CW]$ sont égaux et parallèles. Comme I est le milieu de $[AB]$, j'en déduis que les segments $[BI]$ et $[CW]$ sont égaux et parallèles. Cela prouve que le quadrilatère $BIWC$ est un parallélogramme, et donc que $IW = BC$. Comme $IJ = IW/2$, j'obtiens $IJ = BC/2$. »



Certains membres du jury hochent de la tête, puis l'un d'entre eux demande au candidat s'il est bien sûr que son raisonnement est complet ? Est-il seulement juste ? Que va répondre le candidat ?

Question 876 *[6]L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : « Un quadrilatère $ABCD$ qui possède deux côtés opposés égaux et parallèles, est un parallélogramme » ? Justifiez votre réponse.*

Question 877 *[6] (Baccalauréat 1905, Nancy) Etant donnés la surface et les angles d'un triangle, déterminer ses trois côtés.*

Question 878 *[6] (Manuel Transmath de seconde, 2000) ABC est un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. Démontrez que :*

$$\frac{\text{aire}(ABH)}{\text{aire}(AHC)} = (\tan \widehat{C})^2.$$

Question 879 *[7] Démontrer qu'un triangle est isocèle si, et seulement si, il possède deux médianes de même longueur.*

11.5 Cercles

Question 880 *[6] Montrez que, par trois points non alignés, on peut faire passer un cercle et un seul.*

Question 881 *[6] Soient A, B, C trois points distincts et alignés. Montrer qu'il n'existe pas de cercle qui passe par ces trois points.*

Question 882 *[6] Montrez qu'un cercle admet un unique centre de symétrie.*

Question 883 *[6] Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. Montrez qu'une droite est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$ si et seulement si elle contient O.*

Question 884 *[6] [Dans la leçon présentée, le candidat a défini une tangente à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O comme étant une droite qui passe par un point M du cercle en étant perpendiculaire au rayon $[OM]$. Le jury pose alors la question suivante...] Cette définition est-elle en accord avec la définition générale d'une tangente à un arc paramétré ?*

Question 885 *[7] En restant au niveau du collège, démontrer que le cercle de diamètre $[AB]$ est égal à l'ensemble des points M tels que le triangle ABM est rectangle en M.*

Question 886 *{[4] Q164} Enoncez et démontrez le résultat concernant l'intersection d'une droite et d'un cercle.*

Question 887 *{[4] Q165} Enoncez et démontrez le résultat concernant l'intersection de deux cercles.*

Question 888 *{[4] Q167} Montrer qu'un disque est un ensemble convexe. Que peut-on en déduire concernant l'intersection d'un disque et d'une droite ?*

Question 889 *{[4] Q168} Montrer que tout segment inclus dans un disque fermé est de longueur inférieure au diamètre du disque.*

Question 890 *{[4] Q170} Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $r > 0$. Soit M un point du plan. Combien peut-on abaisser de tangentes à $\mathcal{C}$ issues de M ? Proposer une construction à la règle et au compas de ces tangentes quand cela est possible.*

Question 891 *{[4] Q171} Définissez la puissance d'un point M par rapport à un cercle $\mathcal{C}$.*

Question 892 *{[4] Q172} On note $p_{\mathcal{C}}(M)$ la puissance de M par rapport à un cercle $\mathcal{C}$. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles sécants en deux points A et B. Montrer que la droite (AB) est l'ensemble des points M du plan qui vérifient la relation $p_{\mathcal{C}_1}(M) = p_{\mathcal{C}_2}(M)$.*

Question 893 *{[4] Q173} Déterminer la nature de l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à deux cercles de centres distincts. Que dire si les cercles se coupent en deux points distincts ? sont tangents ?*

Question 894 *{[4] Q174} Construire l'axe radical de deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres distincts à la règle et au compas.*

Question 895 *{[4] Q186} Pouvez-vous énoncer le Théorème de l'angle inscrit. Démontrez-le.*

Question 896 *{[4] Q188} Soit a un réel. Soient A, B deux points distincts du plan. Quel est le lieu des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = a \ (\pi)$ (il s'agit d'une égalité entre angles de droites) ?*

Question 897 *{[4] Q189} Soit a un réel. Soient A, B deux points distincts du plan. Quel est le lieu des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = a \ (2\pi)$ (il s'agit d'une égalité entre angles de vecteurs) ?*

Question 898 *{[4] Q190} Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan. Enoncez et démontrez une CNS portant sur les affixes a, b, c, d de ces points pour que ceux-ci soient cocycliques ou alignés.*

Question 899 *[3] Soient A et B deux points distincts d'un plan.*

a) Décrivez l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 7\pi/6 \ (2\pi)$. Vous avez le droit d'utiliser tous les résultats du cours que vous voulez sans avoir à les redémontrer, mais en les énonçant clairement.

b) Pouvez-vous construire cet ensemble à la règle et au compas ?

Question 900 *{[4] Q197} Montrer que le symétrique de l'orthocentre d'un triangle par rapport à l'un des côtés du triangle appartient au cercle circonscrit au triangle.*

11.6 Trigonométrie

Question 901 *[8] Montrer que les pieds des hauteurs d'un triangle acutangle appartiennent aux côtés du triangle.*

11.7 Questions diverses

Question 902 *[3] Enoncez deux définitions possibles de la médiatrice d'un segment. Démontrez que ces définitions sont équivalentes.*

Question 903 *[6] Quels que soient les points A, B et C du plan, on sait que $AB \leq AC + CB$. C'est l'inégalité triangulaire bien connue. Pouvez-vous démontrer cette affirmation ?*

Question 904 *{[4] Q91} Démontrer la caractérisation métrique d'un segment, autrement dit démontrer qu'un point M appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $AB = AM + MB$.*

Question 905 *{[4] Q92} Montrer qu'un point M appartient à une droite (AB) si et seulement si $|MA - MB| = AB$ ou $AM + MB = AB$.*

Question 906 *{[4] Q95} Soient E un espace affine euclidien d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{E}$, et $(O, \overrightarrow{u}, k) \in E \times \overrightarrow{E} \times \mathbb{R}$. Déterminez l'ensemble des points M de E tels que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u} = k$.*

Question 907 *{[4] Q220} Enoncez le Théorème de Ménélaüs. Pouvez-vous donner quelques indications pour le démontrer ?*

Question 908 *{[4] Q221} Enoncez le Théorème de Ceva. Pouvez-vous donner quelques indications pour le démontrer ?*

Question 909 *{[4] Q222} Soient A, B, C trois points non alignés dans un plan. Soit M un point tel que (AM) (resp. (BM), (CM)) coupe (BC) (resp. (CA), (AB)) en A' (resp. B', C'). Montrer que :*

$$\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'A}} + \frac{\overline{B'M}}{\overline{B'B}} + \frac{\overline{C'M}}{\overline{C'C}} = 1.$$

Question 910 *{[4] Q223} Dans un espace affine euclidien de dimension 3, démontrer le théorème des trois perpendiculaires : si D est une droite contenue dans un plan P, et si p_D (resp. p_P) désigne la projection orthogonale sur D (resp. P), alors $p_D = p_D \circ p_P$.*

Question 911 *{[4] Q229} Dans un plan affine euclidien, on considère un point M et une droite D. Démontrer que la plus petite distance de M à un point de D est atteinte en H, projeté orthogonal de M sur D, et seulement en ce point.*

Question 912 *{[4] Q231} Dans un plan affine euclidien, on considère un point M et une droite D. On note H le projeté orthogonal de M sur D. Si N est un point de D distinct de H, démontrer que $MH < MN$ sans utiliser le Théorème de Pythagore.*

Question 913 *{[4] Q230} Dans l'espace de dimension trois, on considère deux droites non coplanaires D et D'. Montrer qu'il existe une et une seule droite Δ à la fois orthogonale et sécante à D et à D'. En déduire que la distance entre D et D' est donnée par la formule :*

$$\mathrm{d}\left(D, D'\right) = \frac{|\overrightarrow{AA'}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}')|}{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'||}$$

où $(A, A') \in D \times D'$ et où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$sont des vecteurs directeurs de D et D'.

Question 914 *{[4] Q86} Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Donner une équation du plan tangent à la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ en un point régulier M_0 ?*

Question 915 *Donner une équation du plan tangent à l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de $\mathcal{E}$.

Question 916 *[5] Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit :*

$$\begin{array}{rccc} M: & I & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & M(t) = (x(t), y(t)). \end{array}$$

un arc paramétré de classe C^∞. Quand dit-on qu'un point de cet arc est régulier ? Pouvez-vous décrire le comportement local de la courbe au voisinage d'un point $M(t_0)$ à partir des vecteurs dérivés $M^{(n)}(t_0)$ de M en t_0 ? Pouvez-vous nous donner une idée de la preuve de ce résultat ?

Question 917 *{[5] Q95} Soit $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ un arc paramétré de classe C^∞. Connaissez-vous une condition nécessaire pour qu'un point de cet arc soit un point d'inflexion ?*

11.8 Constructions

Question 918 *{[4] Q244} Dessinez deux demi-droites distinctes $[Ox)$ et $[Oy)$, puis placez un point A dans le secteur angulaire saillant formé par ces deux demi-droites. Trouvez les cercles tangents aux côtés $[Ox)$ et $[Oy)$ et passant par A.*

Question 919 *[?] Dessinez une maison en perspective cavalière. Placez le soleil. Tracez l'ombre de cette maison sur le sol.*

Question 920 *[7] A partir de trois segments de longueurs* 1*,* a *et* b*, on demande de construire un segment de longueur* ab *à la règle et au compas. Expliquez.*

Question 921 *[7] A partir de trois segments de longueurs* 1*,* a *et* b*, on demande de construire un segment de longueur* a/b *à la règle et au compas. Expliquez.*

Question 922 *[7] A partir de trois segments de longueurs* 1*,* a *et* b*, on demande de construire un segment de longueur* $\sqrt{ab}$ *à la règle et au compas. Expliquez.*

Question 923 *[7] Construire un segment de longueur* $(\sqrt{7}-1)/5$ *à la règle et au compas.*

Question 924 *[6] Pouvez-vous construire la moyenne proportionnelle de deux nombres* a *et* b *à la règle et au compas ?*

Question 925 *{[4] Q246} A partir de deux segments de longueurs* 1 *et* x*, construire un segment de longueur* $\sqrt{x}$*, puis un segment de longueur* x^2*.*

Question 926 *{[4] Q247} Comment construire les nombres* $\sqrt{n}$ *à la règle et au compas quand* n *est un entier naturel ?*

Question 927 *{[4] Q248} Comment construire la droite* Δ *passant par un point* A *et par l'intersection de deux droites* D *et* D' *sachant que ces deux droites ne se coupent pas sur la feuille ?*

11.9 Lieux de points

Question 928 *Lieu des points du plan tels que* $MA+MB=5$ *?*

Question 929 *Déterminer le lieu des points* M *d'une droite* Δ *donnée, tels que* $MA^2+MB^2=MC$*, où* A*,* B*,* C *sont trois points distincts donnés arbitrairement sur* Δ *?*

Question 930 *[6] Soient* A*,* B *et* C *trois points distincts d'un plan. Déterminer l'ensemble des points* M *tels que la quantité* $MA^2+MB^2+MC^2$ *soit minimum.*

Question 931 *[6] Soient* A*,* B *et* C *trois points distincts d'un plan. En raisonnant analytiquement, déterminer l'ensemble des points* M *tels que la quantité* $MA^2+MB^2+MC^2$ *soit minimum.*

Question 932 *{~[4] Q88} Chercher l'ensemble des points* M *du plan équidistants des droites d'équations* $2x+5y-5=0$ *et* $7x+3y+1=0$*. Déterminer une équation de cet ensemble.*

Question 933 *{~[4] Q119} Quel est l'ensemble des points équidistants de deux droites sécantes* D *et* D' *?*

Question 934 *[10] Dans un plan euclidien orienté, on considère un segment* $[AB]$ *de longueur* $2a$ *non réduit à un point, et l'on se donne un réel* k *non nul. Déterminer l'ensemble* Γ *des points* M *du plan tels que* $\tan\widehat{A}\times\tan\widehat{B}=k$*, où les angles sont ceux du triangle* MAB*.*

Question 935 *[6] Tracer un cercle* $\mathcal{C}$ *de centre* O*, et un point* P *n'appartenant pas à* $\mathcal{C}$*. Choisir un point* M *sur* $\mathcal{C}$*. Tracer le projeté orthogonal* H *de* O *sur la droite* (MP)*. Quelle est le lieu décrit par les points* H *quand* M *parcourt* $\mathcal{C}$ *?*

Question 936 *[6] (Oral du CAPES externe 2012)*
Tracer un cercle de centre O*, et placer un point* A *à l'intérieur du disque ainsi défini. Choisir un point* M *sur le cercle, et construire le symétrique* M' *de* A *par rapport à* M*. Que fait* M' *quand* M *parcourt le cercle ?*
Proposer une solution au niveau du collège. [Indication : on pourra construire le symétrique de A *par rapport à* O*.]*

Question 937 *[6] Pouvez-vous trouver une repésentation paramétrique d'une cycloïde ? On rappelle qu'une cycloïde est une courbe décrite par un point fixe placé sur un cercle qui roule sur une droite sans glisser et à vitesse constante.*

11.10 Coniques

Question 938 *[6] Pouvez-vous donner une définition très précise d'une parabole ? Pouvez-vous définir une parabole sans utiliser de repère du plan ?*

Question 939 *[6] A quel moment les paraboles sont-elles rentrées dans l'histoire ? A quel sujet ?*

Question 940 *{[4] Q257} Rappeler la définition d'une conique* $\mathcal{C}$ *de foyer* F*, de directrice* D *et d'excentricité* e*.*

Question 941 *{[4] Q260} Soient* a *et* b *deux réels tels que* $0<b<a$*. On considère l'ellipse* $\mathcal{E}$ *d'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *dans un repère orthonormal. Tracer le foyer* F *et la directrice* D *de* $\mathcal{E}$ *à partir de la seule donnée des points* $A\,(a,0)$ *et* $B\,(0,b)$*.*

Question 942 *{[4] Q260} On considère l'hyperbole* $\mathcal{H}$ *d'équation* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *dans un repère orthonormal. Tracer le foyer* F *et la directrice* D *de* $\mathcal{H}$ *à partir de la seule donnée des points* $A(a,0)$ *et* $B(0,b)$.

Question 943 *{[4] Q261} Déterminer les coordonnées du foyer et de la directrice de la parabole d'équation* $y = x^2$ *dans un repère orthonormal* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *du plan.*

Question 944 *{[4] Q262} Déterminer les foyers et les directrices de l'ellipse d'équation*

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

dans un repère orthonormal du plan.

Question 945 *[4][7] Soient* A *et* B *deux points distincts dans le plan. Connaissez-vous les lignes de niveau de la fonction* $M \mapsto MA + MB$ *? A quelle condition l'ensemble des points* M *tels que* $MA + MB = k$ *est-il vide ?*

Question 946 *[4][7] Soient* A *et* B *deux points distincts dans le plan. Connaissez-vous les lignes de niveau de la fonction* $M \mapsto |MA - MB|$ *? A quelle condition l'ensemble des points* M *tels que* $|MA - MB|$ *est-il vide ?*

Question 947 *{[4] Q266} Soit* M *un point d'une ellipse* $\mathcal{E}$ *de foyers* F, F'. *Que peut-on dire de la tangente à* $\mathcal{E}$ *en* M *et du triangle* MFF' *? Que se passe-t-il avec une hyperbole à la place d'une ellipse ?*

Question 948 *{[4] Q267} Soient une droite* D *et un point* F *n'appartenant pas à* D. *Proposez une construction à la règle et au compas des points de la parabole* $\mathcal{P}$ *de foyer* F *et de directrice* D.

Question 949 *{[4] Q269} Démontrez que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

définit une paramétrisation régulière de l'ellipse $\mathcal{E}$ *d'équation* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Question 950 *{[4] Q270} Donnez deux paramétrisations régulières différentes de l'hyperbole* $\mathcal{H}$ *d'équation* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, *et justifiez-les.*

Question 951 *{[4] Q274} Montrer qu'une ellipse est l'image de son cercle principal par une affinité orthogonale. En déduire une construction de l'ellipse par points et tangentes.*

Question 952 *{[4] Q275} Que devient l'équation d'une hyperbole dans un repère formé par ses asymptotes ?*

Question 953 *{[4] Q281} Montrer que deux hyperboles distinctes se coupent en au plus quatre points.*

Question 954 *{[4] Q283} Quelle différence topologique permet de distinguer entre une ellipse et une hyperbole ? une ellipse et une parabole ? une hyperbole et une parabole ? Application : que représente la courbe d'équation $y^2 = 2px$ ($p \in \mathbb{R}_+^*$) dans un repère <u>non orthonormal</u> ?*

Question 955 *{[4] Q285} Donner, sans les justifier, trois caractérisations différentes d'une tangente à une ellipse.*

Question 956 *{[4] Q286} Donner, sans les justifier, trois caractérisations différentes d'une tangente à une hyperbole.*

Question 957 *{[4] Q287} Donner, sans les justifier, trois caractérisations différentes d'une tangente à une parabole.*

Question 958 *{[4] Q288} Quelle est la propriété fondamentale des paraboles. Applications ?*

Question 959 *{[4] Q289} Connaissez-vous une méthode simple permettant de construire la normale à une parabole en un point M et utilisant le foyer F et la projection H de M sur la directrice ?*

Question 960 *{[4] Q290} Dessiner une ellipse à la règle et au compas !*

Question 961 *{[4] Q291} Dessiner une hyperbole à la règle et au compas !*

Question 962 *{[4] Q295} Montrer que l'image d'une conique (dégénérée ou non) par une bijection affine est une conique.*

Question 963 *{[4] Q296} Soit Θ l'ensemble dont les éléments sont les ellipses (on suppose ici qu'un cercle est une ellipse particulière), les hyperboles et les paraboles d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ donné. On sait qu'une bijection affine transforme un élément de Θ en un élément de Θ. On demande de montrer qu'une bijection affine transforme nécessairement une ellipse en une ellipse, une hyperbole en une hyperbole, et une parabole en une parabole.*

Question 964 *{[4] Q297} Soient $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien et $\mathcal{C}$ une conique de foyer F et de directrice D dessinée dans ce plan. Si f est une isométrie de $\mathcal{P}$, montrer que $f(\mathcal{C})$ est une conique de foyer $f(F)$ et de directrice $f(D)$. Le résultat reste-il vrai si f est une similitude ?*

Question 965 *{[4] Q299} Montrer que la tangente à la conique d'équation* $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ *en un point* $M_0(x_0, y_0)$ *est la droite d'équation* $\frac{x_0 x}{a^2} \pm \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

11.11 Solides

Question 966 *[6] Qu'est-ce qu'un polyèdre ? Pouvez-vous proposer une définition ? Qu'appelle-t-on polyèdre convexe ?*

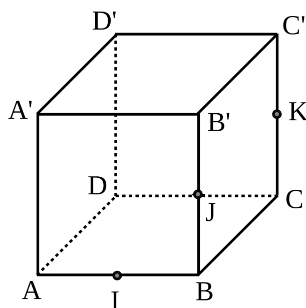
Question 967 *[6] Comment définissez-vous un polyèdre régulier ?*

Question 968 *[6] Connaissez-vous les solides de Platon ? Combien en existe-t-il ? Comment s'appellent-t-ils ?*

Question 969 *[6] Connaissez-vous la relation qui lie le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe ? Qu'appelle-t-on polyèdre eulérien ? Existe-t-il des polyèdres non eulériens ?*

Question 970 *[6] (Oral du CAPES 2008) On sait réaliser le patron d'un cube. Pouvez vous nous présenter la construction d'un patron d'un cube surmonté d'une pyramide, comme si nous étions dans une sympathique classe de sixième ?*

Question 971 *[6] Soient* $ABCDA'B'C'D'$ *un cube, et* I, J, K *les milieux des arêtes* $[AB]$, $[BB']$ *et* $[CC']$.



1) Indiquer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse :

a) Les points I, J, K *sont alignés.*

b) Les droites (AC) *et* $(A'K)$ *sont sécantes.*

c) Les droites (IJ) *et* $(A'D')$ *sont parallèles.*

d) Les droites (AJ) *et* (DK) *sont parallèles.*

2) Commentez les réponses ci-dessous données par un élève :

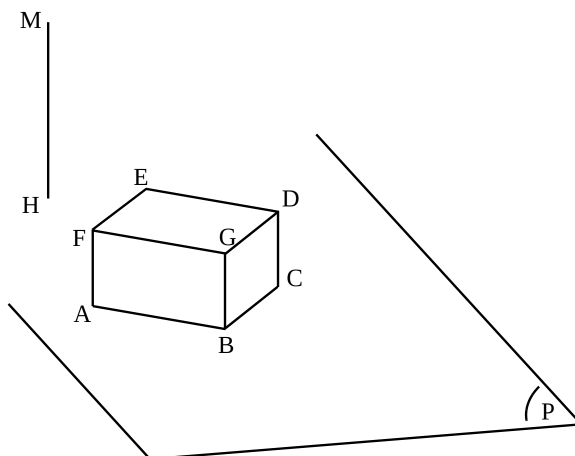
a) Les points I, J, K ne sont pas alignés car il n'appartiennent pas tous au même plan.

b) Les droites (AC) et $(A'K)$ sont sécantes car elles ne sont pas parallèles.

c) D' n'est pas sur la face $ABA'B'$ donc les droites (IJ) et $(A'D')$ ne peuvent pas être parallèles.

d) Les droites sont parallèles car elles appartiennent à deux plans parallèles.

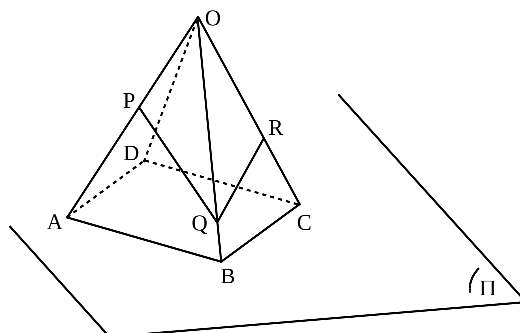
Question 972 *[6] Un parallélépipède rectangle est dessiné en perspective, posé sur un plan P horizontal. Un peu en arrière de ce parallélépipède, on trace un segment vertical $[HM]$ (M est au-dessus de H). Une lampe est placée en M, à la verticale du point H qui est supposé appartenir à P. Tracer l'ombre du parallélépipède sur la table.*



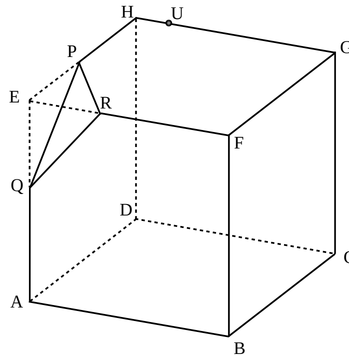
Question 973 *[6] Une pyramide à base rectangulaire $OABCD$ est posée sur un plan horizontal Π sur sa face $ABCD$. On choisit trois points P, Q, R situés respectivement sur les arêtes $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$.*

a) Tracer l'intersection des plans (PQR) et Π.

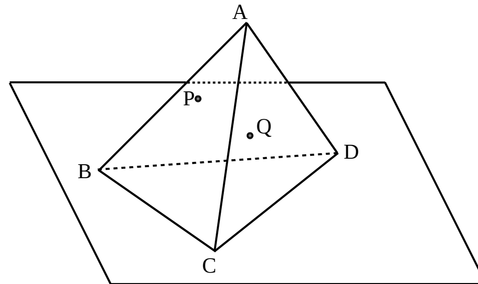
b) Tracer l'intersection de la pyramide et du plan (PQR).



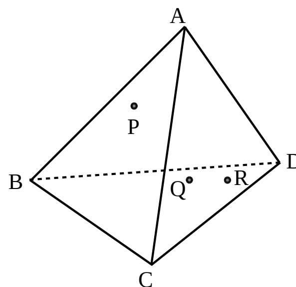
Question 974 *[6] La figure ci-dessous représente un cube dont un coin a été coupé. On a choisi un point U sur une de ses arêtes. Tracer l'intersection du cube avec le plan passant par U et parallèle au plan (PQR).*



Question 975 *[6] Les points P et Q de la figure ci-dessous appartiennent aux faces ABC et ACD d'un tétraèdre $ABCD$. Comment faire pour construire l'intersection de la droite (PQ) et du plan (BCD) ?*



Question 976 *[6] Les points P, Q, R de la figure ci-dessous appartiennent respectivement aux faces ABC, ACD et BCD du tétraèdre $ABCD$. On demande de tracer la section du tétraèdre par le plan (PQR).*



Question 977 *[6] Montrer que la section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle.*

Question 978 *[6] Montrer que la section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à l'axe est un rectangle.*

Chapitre 12

Nombres réels

Question 979 *[1] Pouvez-vous donner des axiomes qui définissent le corps* $\mathbb{R}$ *des réels ?*

Question 980 *[1] Connaissez-vous une construction explicite de* $\mathbb{R}$ *? Pouvez-vous en donner les grandes lignes ?*

Chapitre 13

Nombres complexes

13.1 Généralités

Question 981 *~[9] (Ecrit du CAPES 2015)*
a) Démontrer que, pour tout couple (z_1, z_2) *de nombres complexes, on a* $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
b) On suppose z_1 *et* z_2 *sont des nombres complexes non nuls. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement s'il existe un réel positif* λ *tel que* $z_2 = \lambda z_1$. *Interpréter ce résultat en termes d'argument.*

Question 982 *[1] Pouvez-vous indiquer les grandes lignes d'une construction du corps des nombres complexe* $\mathbb{C}$ *?*

Question 983 *[1] Soient* $\mathbb{R}[X]$ *l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients réels, et* $\left(X^2+1\right)$ *l'idéal engendré par* X^2+1 *dans cet anneau. On sait que le quotient* $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ *est structuré en anneau commutatif pour les lois naturelles.*
a) Montrer que $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ *est un corps.*
b) Montrer que le polynôme X^2+1 *possède une racine dans* $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.
c) Montrer que $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$, *et que le système* $\mathcal{B} = (\dot{1}, \dot{X})$ *est une base de cet espace.*
d) Définir un monomorphisme de corps de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$. *Que peut-on conclure ?*

Question 984 *[1] Peut-on énoncer une propriété universelle vérifiée par* $\mathbb{C}$, *par exemple dire que* $\mathbb{C}$ *est à isomorphisme près le plus petit corps qui contienne le corps* $\mathbb{R}$ *et une racine de* -1 *? Comment donner du sens à cette phrase ? Comment démontrer cette affirmation ?*

Question 985 *[1] Peut-on définir l'argument de n'importe quel nombre complexe ? Et le module : peut-il être défini partout ?*

Question 986 *[1] (Oral du CAPES externe 2006)*
Montrer que $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$ *quels que soient* z_1, z_2 *appartenant à* $\mathbb{C}$.

Question 987 *[1] Qu'appelle-t-on argument principal d'un nombre complexe ?*

Question 988 *[1] A-t-on le droit d'écrire* $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ *lorsque* z_1 *et* z_2 *appartiennent à* $\mathbb{C}^*$ *?*

Question 989 *[1] Pouvez-vous définir l'exponentielle* e^z *d'un nombre complexe* z. *Pourquoi utilise-t-on une notation qui rappelle l'exponentielle réelle ?*

Question 990 *[1] Que veut-on dire quand on parle de « grand argument » d'un nombre complexe, et que l'on note* $\operatorname{Arg} z$ *avec un « A » majuscule au lieu de* $\arg z$ *? Est-il nécessaire d'orienter le plan complexe pour parler de* $\operatorname{Arg} z$ *?*

Question 991 *[1] On note* j *le nombre complexe* $j = e^{i2\pi/3}$.
a) Montrer que $\overline{j} = j^2$.
b) Montrer que $j^3 = 1$.
c) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
d) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $w = -j^2$.
e) Donner la forme algébrique de j *et de* $\overline{j}$.

Question 992 *[1] Soit* $z = x + iy$ *un nombre complexe donné sous forme algébrique. On suppose dans toute la suite que le point* M *d'affixe* z *n'appartient pas à la demi-droite* $D_- = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0\right\}$. *On note* $\arg z$ *l'argument de* z *pris dans l'intervalle* $]-\pi, \pi[$.
a) Exprimer $\arg z$ *en fonction de* x *et* y.
b) En déduire qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \backslash D_- \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^2 \backslash D_-$, *telle que* $\arg(x + iy) = \varphi(x,y)$ *quel que soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D_-$.

Question 993 *[1] Comment résoudre une équation du second degré dans* $\mathbb{C}$ *?*

Question 994 *[1] Résoudre l'équation* $z^2 = -40 + 42i$ *dans* $\mathbb{C}$.

Question 995 *[1] Résoudre* $|z| = |1/z| = |1 - z|$.

13.2 Nombres complexes & géométrie

Question 996 *[1] On considère trois points A, B et C du plan, d'affixes respectives a, b et c. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\pi/3$. Exprimer l'affixe de l'image $r(M)$ de M par r en fonction de l'affixe z de M, de b et de j. On expliquera très précisément comment procéder et si l'on utilise un résultat du cours, on le redémontrera.*

Question 997 *{[4] Q499} On se donne deux points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2. Construire le point M d'affixe $z = z_1 z_2$ à la règle et au compas.*

Question 998 *[1] Soit Z un nombre complexe différent de 0 donné dans le plan d'Argand-Cauchy. Proposez une construction géométrique des nombres complexes z tels que $z^2 = Z$ à la règle et au compas.*

Question 999 *{[4] Q479} Donner une CNS portant sur les affixes z et z' de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ pour que ces vecteurs soient orthogonaux.*

Question 1000 *{[4] Q479} Donner une CNS portant sur les affixes z et z' de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ pour que ces vecteurs soient colinéaires.*

Question 1001 *{[4] Q481} Quelles est l'écriture complexe d'une translation ? d'une rotation ? d'une homothétie ? de la réflexion s_{Ox} par rapport à l'axe des abscisses Ox ?*

Question 1002 *{[4] Q482} Quelle est l'expression complexe d'une similitude directe du plan ?*

Question 1003 *{[4] Q483} Quelle est l'expression complexe d'une similitude indirecte du plan ?*

Question 1004 *{[4] Q484} Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Un utilisant uniquement le fait qu'une similitude de $\mathcal{P}$ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui conserve les rapports de distance, et qu'une similitude est directe si elle conserve les angles orientés de vecteurs, démontrer que $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est de la forme $f(z) = az + b$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.*

Question 1005 *{[4] Q485} L'écriture $z' = az + b\overline{z} + c$ (où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$) est-elle l'expression complexe d'une similitude ? Justifiez.*

Question 1006 *{[4] Q488} Dessinez à la règle et au compas l'ensemble des points M d'affixe z telles que $\arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = \frac{\pi}{4} \ (2\pi)$.*

Question 1007 *{[4] Q489} Pouvez-vous dire quel est le lieu des points M dont l'affixe vérifie* $\arg\left(\frac{z-2}{z-i}\right) = \frac{\pi}{4}\ (\pi)$ *?*

Question 1008 *{[4] Q490}* $\mathcal{C}$ *est le cercle circonscrit à un triangle* ABC*. On note* O *son centre,* R *son rayon, et* a*,* b*,* c *les affixes de* A*,* B*,* C *dans un repère d'origine* O*.*

a) Quelle est l'affixe du centre de gravité G *du triangle* ABC *?*

b) Montrer que $h = a+b+c$ *est l'affixe de l'orthocentre* H *du triangle* ABC*. En déduire que* $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$*.*

Chapitre 14

Divers

14.1 Raisonnements

Question 1009 *[7] On veut montrer que dans toute boîte contenant n crayons de couleur, tous les crayons sont de la même couleur. On raisonne par récurrence sur n. La propriété est triviale si $n = 1$. Si elle est vraie au rang n, on considère une boîte contenant $n + 1$ crayons de couleur numérotés de 1 à $n + 1$. Si on enlève le premier crayon de la boîte, celle-ci ne contient plus que des crayons de même couleur d'après l'hypothèse récurrente. Si l'on enlève le dernier crayon de la boîte, celle-ci ne contient plus que des crayons de même couleur. Obligatoirement les $n + 1$ crayons de la boîte seront de la même couleur, et la propriété est vraie au rang n. Où est l'erreur dans ce raisonnement ?*

Question 1010 *[7] Dans une contrée vivent uniquement des gueux et des chevaliers. Les chevaliers disent toujours la vérité, mais les gueux mentent irrémédiablement. Vous rencontrez deux hommes A et B. Soudain A dit que B est un chevalier, et B affirme que vous êtes devant un gueux et un chevalier. Qui sont A et B ?*

Question 1011 *[3] a) Soient a, b, c trois réels positifs ou nuls tels que $a \leq b + c$. Montrer l'inégalité :*

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

b) Soit d une distance sur un ensemble E. Montrer que l'application d' suivante est une distance sur E :

$$d' = \frac{d}{1+d}.$$

Question 1012 *[7] Soit x un nombre réel tel que $x \geq \sqrt{3}$. Démontrer que :*

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \geq \sqrt{3}.$$

Question 1013 *[7] Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :*

$$\left|x^2 - 6x + 8\right| = 2x - 7 \quad (E)$$

14.2 Autres questions

Question 1014 *[7] L'implication $1 = 0 \Rightarrow 10 < 3$ est-elle vraie ? Si oui, démontrez-là.*

Bibliographie

[1] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. I : Nombres, algèbre, arithmétique et polynômes, CSIPP, 2014.

[2] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. II : Algèbre linéaire, CSIPP, 2014.

[3] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. III : Espaces euclidiens et hermitiens, CSIPP, 2014.

[4] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. IV : Géométrie affine et euclidienne, CSIPP, 2014.

[5] A. Delcroix, D.-J. Mercier, A. Omrane, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. V : Analyse, Intégration, Géométrie, Publibook, 2011.

[6] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. VI - Cuvée spéciale, analyse et autres joyeusetés, CSIPP, 2013.

[7] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. VII - Topologie et autres thèmes lumineux, CSIPP, 2014.

[8] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. VIII - Analyse, à paraître.

[9] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. IX - Algèbre et arithmétique, à paraître.

[10] D.-J. Mercier, Exercices et problèmes de mathématiques pour le CAPES et l'agrégation interne, Publibook, 2013.

[11] D.-J. Mercier, Dossiers mathématiques n°6, Les grands théorèmes de l'analyse, CSIPP, 2013.

Du même auteur

On peut obtenir la liste des ouvrages parus en se connectant sur le site *MégaMaths* ou en faisant une recherche sur *Amazon.fr*. Le site *Amazon.fr* permet aussi de feuilleter la plupart de mes livres. Pour toute question, écrivez à dany-jack.mercier@hotmail.fr qui sera heureux de vous répondre.

Parmi les livres déjà parus, signalons les deux collections suivantes :

DOSSIERS MATHEMATIQUES – Chaque fascicule de cette collection précise les connaissances de base sur un thème donné pour faire rapidement le point. Déjà parus :

- DM 01 - Méthode des moindres carrés
- DM 02 - Dualité en algèbre linéaire
- DM 03 - Probabilités
- DM 04 - Introduction à l'algèbre linéaire
- DM 05 - Déterminants et systèmes linéaires
- DM 06 - Les grands théorèmes de l'analyse
- DM 07 - Les raisonnements mathématiques
- DM 08 - Réduction des endomorphismes
- DM 09 - Mathématiques et codes secrets
- DM 10 - Codes correcteurs d'erreurs
- DM 11 - Loi normale, échantillonnage et estimation
- DM 12 - Corps finis

ACQUISITION DES FONDAMENTAUX – Cette collection permet de travailler sur de nombreuses questions courtes extraites d'écrits et d'oraux de CAPES, CAPLP et agrégations internes, sur lesquelles il convient de savoir réagir efficacement.

- Vol. I - Nombres, algèbre, arithmétique, polynômes
- Vol. II - Algèbre linéaire
- Vol. III - Espaces euclidiens et hermitiens
- Vol. IV - Géométrie affine et euclidienne
- Vol. V - Analyse, intégration et géométrie
- Vol. VI - Cuvée spéciale : analyse et autres joyeusetés
- Vol. VII - Topologie et autres thèmes lumineux